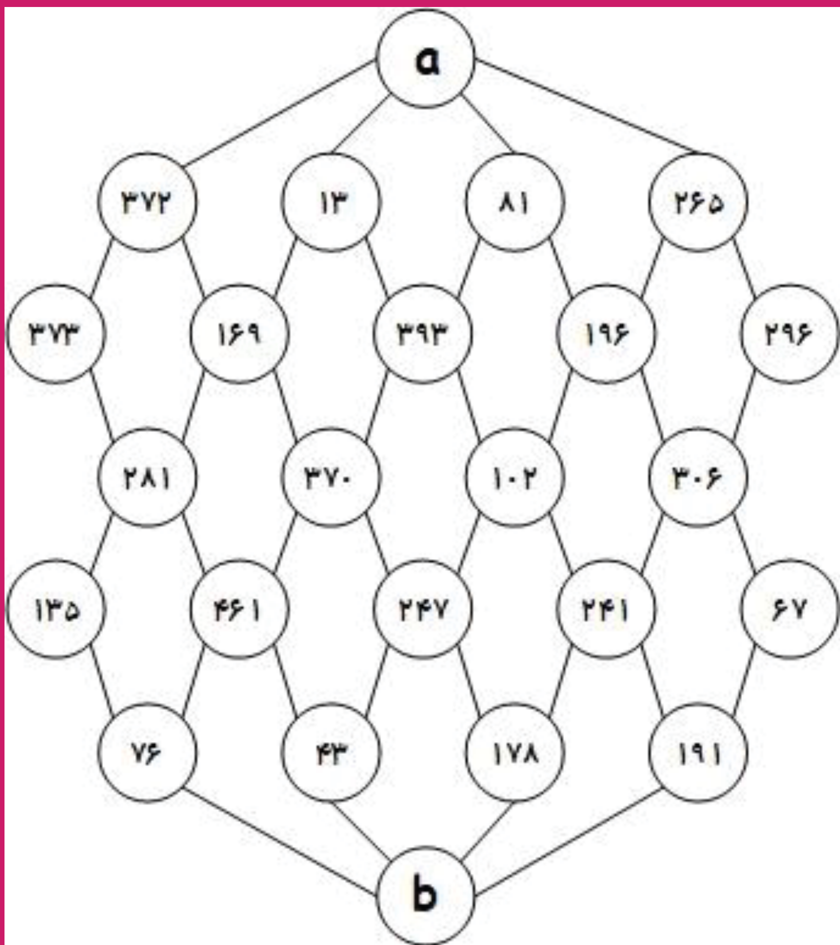
ریاضیات محاسبه‌ای

پرویز شهریاری

جلد سوم

(سال دوم دبیرستان - نیمسال اول)

نظام جدید آموزشی



قابل استفاده:

۱. دانش‌آموزان دوره دبیرستان (نظام جدید)؛

۲. همه کسانی که می‌خواهند ریاضیات را پیش خود یاد بگیرند؛

۳. همه داوطلبان کنکورها و المپیادها.

پرویز شهریاری

ریاضیات محاسبه‌ای ۳

(سال دوم دبیرستان ـ نیم سال اول)

نظام جدید آموزشی

انتشارات مجید

خیابان لبافی‌نژاد، نرسیده به خ اردیبهشت، پلاک ۲۰۸ تلفن ۶۴۹۵۷۱۳

ریاضیات محاسبه‌ای (جلد سوم)

پرویز شهریاری

چاپ سوم: تهران ۱۳۷۷

تیراژ: ۱۰۰۰ نسخه

چاپ: چاپخانه رامین

شابک ۹۶۴ - ۴۵۳ - ۰۲۱ - ۷   ISBN 964 - 453 - 021 - 7

شابک دورهٔ ۴ جلدی ۹۶۴ - ۵۵۰۹ - ۹۶ - ۳

ISBN 964 - 5509 - 96 - 3 (4 Vol. Set)

۱۵۰۰ تومان

فهرست مطالب

پیش از آغاز و یادآوری ۷

۱. ریاضیات، در تمامی زندگی تمامی ما رخنه کرده است ۸

۲. هرکسی، استعداد یادگیری ریاضیات را دارد ۱۱

۳. چگونه می‌توان به ریاضیات علاقه‌مند شد؟ ۱۶

۱. انتقال محورهای مختصات و پیدا کردن محور تقارن و مرکز تقارن یک نمودار ۳۰

۱. انتقال محورها ۳۰

۲. محورهای تقارن ۳۴

تمرین‌ها ۴۳

۲. عبارت‌های گویا و عبارت‌های گنگ ۴۵

۱. برخی ویژگی‌های عبارت‌های گویا ۴۵

۲. عمل با عددهای رادیکالی ۵۱

۳. مفهوم تابع ۸۱

۱. ورود به مطلب ۸۱

۲. تابع ۸۸
۳. تابع زوج و تابع فرد ۹۷
۴. عمل با $f(x)$ ۹۹
۵. تابع وارون ۱۰۳
۶. فاصله یا بازه ۱۰۵
۷. مفهوم تابع در گذر زمان ۱۰۴
تمرین‌ها ۱۱۰

۴. دایره و سهمی ۱۱۵
۱. دایره ۱۱۵
۲. سهمی ۱۲۲

۵. تابع بخش درست ۱۴۰
تمرین‌ها ۱۵۷

۶. تعمیم مفهوم توان و تابع نمایی ۱۶۰
۱. مفهوم توان را می‌توان تعمیم داد ۱۴۰
۲. تابع نمایی ۱۶۹
تمرین‌ها ۱۷۱

۷. دنباله‌های عددی و تصاعدها ۱۷۴
۱. دنبالهٔ عددی ۱۷۴
۲. تصاعد حسابی ۱۸۰
۳. تصاعد هندسی ۱۹۲
۴. مفهوم تصاعد در گذشته و حال ۲۰۸
تمرین‌ها ۲۱۰

۸. لگاریتم و تابع لگاریتمی ۲۱۵
۱. عمل عکس در ریاضیات ۲۱۵
۲. تعریف و ویژگی‌ها ۲۱۸
۳. قانون محاسبه ۲۱۹
۴. لگاریتم دهدهی و لگاریتم طبیعی ۲۲۴
۵. تابع لگاریتمی ۲۳۱
۶. لگاریتم چه سودی دارد و چگونه کشف شد؟ ۲۳۳
تمرین‌ها ۲۴۳

۹. نمودار تابع‌های مثلثاتی ۲۴۸
۱. تابع‌های متناوب ۲۴۸
۲. نمودار تابع‌های مثلثاتی ساده ۲۵۲
تمرین‌ها ۲۵۵

پاسخ، راهنمایی و حل مساله‌ها ۲۵۸
پیش از آغاز و یادآوری ۲۵۸
محور و مرکز تقارن ۳۰۰
عبارت‌های گویا و عبارت‌های گنگ ۳۰۷
مفهوم تابع ۳۴۱
دایره و سهمی ۳۵۹
بخش درست عدد ۳۷۸
تعمیم مفهوم توان و تابع نمایی ۴۰۵
دنباله‌های عددی و تصاعدها ۴۱۱
لگاریتم و تابع لگاریتمی ۴۳۹
نمودار تابع‌های مثلثاتی ۴۶۸

از پرویز شهریاری

منتشر شده است:

• ریاضیات محاسبه‌ای (جلد اول) ـ سال اول دبیرستان ـ نیم سال اول	۱۲۰۰ تومان
• ریاضیات محاسبه‌ای (جلد دوم) ـ سال اول دبیرستان ـ نیم سال دوم	۱۴۰۰ تومان
• ریاضیات محاسبه‌ای (جلد سوم) ـ سال دوم دبیرستان ـ نیم سال اول	۱۵۰۰ تومان
• ریاضیات محاسبه‌ای (جلد چهارم) ـ سال دوم دبیرستان ـ نیم سال دوم	۱۳۰۰ تومان
• ریاضیات محاسبه‌ای (جلد پنجم) ـ سال سوم دبیرستان ـ ریاضی‌فیزیک	۱۶۰۰ تومان
• مسأله‌های المپیاد آمریکا ـ با حل	۴۰۰ تومان
• مسأله‌های المپیاد شوروی ـ با حل	۱۲۰۰ تومان
• مسأله‌های المپیاد کشورهای مختلف ـ با حل	۱۶۰۰ تومان
• مهم‌ترین مسأله‌ها و قضیه‌های دشوار ریاضی	۱۵۰۰ تومان
• بازی‌ها ـ سرگرمی‌ها ـ معماها در ریاضیات	۱۲۰۰ تومان
• نظریهٔ ساختمان‌های هندسی	۶۰۰ تومان
• نابرابری	۶۰۰ تومان
• هندسهٔ تحلیلی و جبر خطی (مسأله با حل)	۱۲۰۰ تومان

پیش از آغاز و یادآوری

من ریاضیات را دوست دارم، نه به این انگیزه که پایهٔ صنعت ما بر آن نهاده شده است، بلکه در ضمن، به این خاطر که بسیار زیباست، به این خاطر که؛ اگر آدمی بخواهد، می‌تواند عشق به بازی را در آن بیابد، به این خاطر که، در درون آن، چنان بازی‌های رازگونه‌ای وجود دارد که آدمی می‌تواند، به یاری آن‌ها، تا آن‌جا پیش رود که به «نامتناهی» دست یابد. ریاضیات آگاهی‌های روشنی، دربارهٔ «بی‌نهایت» به ما می‌دهد و دربارهٔ چیزهایی سخن می‌گوید که به دشواری می‌توان به اندیشه آورد. از این گذشته، ریاضیات به طور شگفت‌انگیزی، انسانی است و کمتر از هر جای دیگری، جملهٔ «دو دوتا، چهارتا» با آن سازگار است. ریاضیات، همه‌جا و همیشه، این آوا را سر داده است که، فعالیت و استعداد آدمی، پایانی ندارد.

خانم روزا پِتِر، ریاضی‌دان مجارستانی
در کتاب «بازی با بی‌نهایت»

۱. ریاضیات، در تمامی زندگی ما، رخنه کرده است

خیام، ریاضی‌دان، اختر شناس و رباعی‌سرای بزرگ ایران، که در سده‌های پنجم و ششم هجری قمری می‌زیست، در پیش‌گفتار کتاب «جبر» خود، می‌گوید:

«ریاضیات، به پیش‌گامی سزاوارتر است».

کارل فردریک گُوس، ریاضی‌دان و اخترشناس بزرگ آلمانی (۱۷۷۷_۱۸۵۵ میلادی)، ریاضیات را، **«فرماندهٔ همهٔ دانش‌ها»** می‌دانست.

ب. فلدبلوم، تحلیل‌گر معاصرِ تاریخ و فلسفهٔ ریاضیات، دیدگاه گُوس را کامل می‌کند و ریاضیات را، **«فرمانده و یاری دهندهٔ همهٔ دانش‌ها»** می‌داند.

آ.د.آلکساندروف، ریاضی‌دان و فیلسوف زمان ما، موضوع را روشن‌تر می‌کند. او می‌گوید:

«. . . سرچشمهٔ زنده بودن ریاضیات، در این‌جاست که، همهٔ مفهوم‌ها و نتیجه‌گیری‌های آن، . . . ناشی از واقعیت است و کاربرد فراوانی، در سایر دانش‌ها، در صنعت و در همهٔ جنبه‌های گوناگون زندگی انسان، پیدا می‌کند و این، مهم‌ترین چیز، برای درکِ ریاضیات است . . .».

می‌شنوید یا در روزنامه‌ای می‌خوانید: ساختمانی سه طبقه، پیش از آن‌که کار ساختمانی آن پایان یابد، فروریخت و عده‌ای از کارگران زحمت‌کش را کُشت یا زخمی کرد، وقتی به دنبال پیدا کردنِ دلیل این فاجعه می‌روید، به شما می‌گویند: ساختمان. مهندس نداشته است، یعنی نقشهٔ ساختمان، به وسیلهٔ مهندس آزموده، آماده نشده و، در نتیجه، «محاسبهٔ» مقاومت پی‌ها و تیر آهن‌ها، به درستی انجام نگرفته است.

مهندسی که می‌خواهد، دو تیغهٔ کوه را به هم وصل کند و پُلی بسازد که، راه‌آهن، بتواند از روی آن بگذرد و دره‌ای ژرف و مخوف را، پشت سر بگذارد، باید دو مساله را، با هم، حل کند: **بیشترین** مقاومت پُل و **کمترین** هزینه‌ای که برای ساختن آن لازم است. در این‌جا، باید مرز **لازم و کافی** را،

برای مصالح ساختمانی پیدا کرد، یعنی مقدار مصالحی که، اگر کمتر از آن مصرف شود، پل زیر فشار وزن واگُن‌ها فرو می‌ریزد و، اگر بیشتر از آن مورد استفاده قرار گیرد، موجب تلف شدن بی‌رویهٔ مصالح و، در نتیجه، هزینهٔ بیش از حد لازم می‌شود. اگر قرار بود، تنها «بیشترین مقاومت» در نظر گرفته شود، می‌شد دره را، از پایین تا بالا «بتون آرمه» کرد، و اگر تنها به «کمترین مقدار ممکن هزینه» توجه شود، با یک یا چند تیر چوبی بلند، که دو تیغهٔ کوه را به هم پیوند دهند، کار به پایان می‌رسد. ولی حل مساله، باید با توجه به هر دو جنبهٔ کار، یعنی «بیشترین مقاومت» و «کمترین هزینه»، حل شود و این، کار مهندسی است که، به‌جز تجربه و آزمودگی، به اندازهٔ کافی، با ریاضیات آشنا باشد.

وقتی از تلویزیون یا رادیو، به «پیش‌بینی» هوا در ۲۴ ساعت بعد، گوش می‌کنید، یا آگاه می‌شوید، سفینه‌ای، با سرنشین یا بدون آن، به مدار زمین پرتاب شده است، یا وقتی این خبر را می‌شنوید که، به یاری رایانه، توانسته‌اند، بر پایهٔ تنها کتابی که از قوم «اینکا» ـ سرخ‌پوستان بومی امریکای مرکزی ـ باقی‌مانده بخشی اساسی از خط و زبان این قوم را بشناسند . . .، همه‌جا، و در پس پردهٔ همهٔ این خبرها، دانش ریاضیات و ریاضی‌دانان پنهان شده‌اند.

ولی سخن، به همین‌جا پایان نمی‌یابد. باید گفت، اگر در گمان خود، دانش ریاضیات را، از مجموعهٔ دانش‌های موجود، بیرون کنیم، نه‌تنها تمامی صنعت و تمدن امروزی فرو می‌ریزد و، همهٔ دانش‌های دیگر، تکیه‌گاه اصلی خود را از دست می‌دهند، حتا انسان، در زندگی عادی و روزانهٔ خود، فلج می‌شود و همهٔ رابطه‌های انسانی موجود، به صورتی فاجعه‌آمیز، از هم می‌گُسلد.

بی جهت نیست که «ریاضیات» ـ دست‌کم به صورت مقدماتی آن ـ همیشه با انسان بوده است و تاریخی به قدمت تاریخ انسان دارد [از این می‌گذرم که، اگر خصلت غریزی و یا شاید در برخی حالت‌ها، درک و حافظهٔ

جانوران را در نظر بگیریم که، به عنوان مثال، «حساب» بچه‌های خود را دارند، آن وقت باید عمر «ریاضیات» را، درازتر از عمر بشر دانست.]

همهٔ ما از کاربرد ریاضیات در دانش‌هایی همچون اخترشناسی، فیزیک و مکانیک آگاهیم، ولی در زمان ما، ریاضیات توانسته است، دامنهٔ نفوذ خود را، حتا در دانش‌هایی که به کلی دور از ریاضیات به شمار می‌آمدند، همچون بررسی‌های تاریخی، پزشکی، روان‌شناسی، باستان‌شناسی، جامعه‌شناسی، ... گسترش دهد؛ و دانش‌هایی مثل اقتصاد، زیست‌شناسی، ژن‌شناسی، زمین‌شناسی، و ...، تا حد زیادی، به طور کامل، چه از دیدگاه بکار گرفتن دستورهای ریاضی و چه از نظر استفاده از روش‌های ریاضی، چهره‌ای ریاضی‌گونه به خود گرفته‌اند.

□

ریاضیات، مسیری طولانی را پیموده است: از نیازهای ابتدایی انسان نخستین، برای نگاه داشتن «حساب» افراد و دام‌ها، «تقسیم» غذا و زمین بین آن‌ها، «تعیین سهم کار» و غیره آغاز کرد و، با گذشتن از مسیرهای پیچ در پیچ نیازهای بیرونی و درونی ریاضیات، خود را به ستیغ انتزاع کشانید و، سپس، دوباره به زندگی و عمل بازگشت.

زمانی بود که، در نظام برده‌داری یونان باستان و نظام «ارباب ـ رعیتی» سده‌های میانه در اروپای غربی، حق تقدم را به «استدلال»، «اندیشهٔ درونی» و «جدل‌های به اصطلاح منطقی» می‌دادند و، برای مشاهده و تجربه، ارزشی قایل نبودند. پیشرفت ریاضیات، و به‌ویژه هندسه، در یونان باستان و اوج‌گیری بحث‌های بی سرانجام کشیشان سده‌های میانه دربارهٔ «سَعد و نَحس» و یا در این باره که، در نوک یک سوزن، چه تعداد از فرشتگان می‌توانند جا بگیرند، ناشی از همین اندیشه بود.

بسیار طول کشید تا انسان به این اصل ساده پی برد که، بدون مشاهدهٔ

طبیعت و جامعه و تنها با «اندیشه» دربارهٔ آن، نمی‌توان به قانون‌های حاکم بر آن‌ها پی برد. بسیار طول کشید تا انسان «فهمید» که، برای پی بردن به «رازهای» موجود در طبیعت و جامعه، باید پیش از هر چیز، چشمان خود را باز کرد، دور و بر خود را با دقت دید و سپس، دربارهٔ آن‌چه دیده می‌شود، به آزمایش پرداخت و سرانجام، بعد از گذراندن این دو مرحله، از «اندیشهٔ» خود یاری گرفت و بستگی‌های موجودِ بین آن‌چه را که مورد آزمایش و مشاهده قرار گرفته است حدس زد و «نظریهٔ» خود را بنیان نهاد. و البته، این، پایان کار نیست. هر نظریه‌ای، در هر زمینه‌ای باشد، باید دوباره به محک آزمایش و زندگی بخورد، تا مرز کارآمد بودن آن، روشن شود.

۲. هرکسی، استعداد یادگیری ریاضیات را دارد

ریاضیات هم، مثل هر جنبهٔ دیگری از شناخت آدمی، هم دانش است و هم هنر. در هر زمینه‌ای که به خلاقیت انسان بستگی دارد، هم جنبه‌های «علمی» دیده می‌شود و هم جنبه‌های «هنری».

اگر دانش را «قابل آزمایش و قابل یادگیری» و «هنر» را «نتیجهٔ خلاقیت و استعداد ویژه انسان» بدانیم، آن وقت روشن می‌شود که، در همهٔ فعالیت‌های انسانی، دانش و هنر به هم پیوسته است.

تا آن‌جا که شما «موسیقی را یاد می‌گیرید» دانش است، ولی از آن‌جا که «می‌خواهید بیافرینید» و چیزی تازه ارائه دهید، هنر است. شما می‌توانید نُت‌خوانی را «یاد بگیرید»، روش به دست گرفتن، مثلاً، ویُلون و آرشه را «بیاموزید»، حتا می‌توانید، به یاری تمرین و آزمایش، بسیاری از آهنگ‌های موجود را «بنوازید». تا این‌جا، با جنبه‌هایی از موسیقی سروکار دارید که دارای «قانون» است و، بنابراین، هر کسی می‌تواند، دیر یا زود، آن‌ها را فرا گیرد. ولی، هر کسی که این «قانون‌ها» را بداند، هنوز «آهنگ‌ساز» و «آفریننده» نیست؛ و از این‌جاست که، «هنر» آغاز می‌شود و باید «استعداد هنری» خود

را بنمایاند.

این را هم بگویم که، هیچ معیاری، دست‌کم تاکنون، پیدا نشده است که به یاری آن بتوان، از آغاز، «استعداد آفرینندگی» را، به روشنی کشف کرد. چه بسیارند کسانی از توده‌های مردم که، اگر با «قانون‌های موسیقی» آشنا می‌شدند و امکان‌های لازم را در اختیار داشتند، می‌توانستند موسیقی‌دان هنرمندی از آب درآیند.

وضع دربارهٔ ریاضیات هم، به همین گونه است. تا آن‌جا که ریاضیات به قاعده درآمده و زاویه‌های گوناگون آن روشن شده است، «دانش» است و هرکسی می‌تواند به آن دسترسی پیدا کند، ولی از آن‌جا که به مرز ناشناخته‌ای از ریاضیات برخورد کنیم و نیاز به آفرینندگی داشته باشد، «استعداد» می‌خواهد و «هنر».

همین‌جا به این نکته هم اشاره کنم که «یاد دادن و یاد گرفتن ریاضی» هم، از این قاعده جدا نیست. شرط لازم یاد دادنِ ریاضیات، دانستن است و، معلم ریاضی، باید، بر آن‌چه می‌خواهد بیاموزد، مسلط باشد. ولی این، کافی نیست. معلم باید «هنر آموختن» را هم داشته باشد، چیزی که، بدون آن، می‌تواند موجب سرخوردگی و سردرگمی بسیاری از دانش‌آموزان با استعداد شود. برای «یاد گرفتن»، هم، صرف وقت، تمرین و علاقه لازم است، ولی به‌جز این‌ها، باید «هنر یادگیری» و «هنر درس خواندن» را بداند تا بتواند به استعدادهای خود، پی ببرد.

در دهه‌های اخیر، بسیاری از خلق‌های محروم از نژادهای غیر سفید، توانسته‌اند، به طور نسبی، آزادی خود را بازیابند و به دانش رو آورند. در ضمن، پیشرفت حیرت‌آور زنان در زمینه‌های گوناگون دانش در کشورهای مختلف، به طور قانع کننده‌ای ثابت می‌کند که فراگیری دانش، و از آن‌جمله ریاضیات، نه خاص مردان است و نه خاص نژاد و یا قومی ویژه.

به‌ویژه دربارهٔ زنان، اندکی بیشتر صحبت کنیم. حتا از گذشته‌های دور

و تا پیش از چند دهه قبل که نام و نشان کمتری از زنان (به‌ویژه در عرصهٔ دانش) دیده می‌شود، با وجود همهٔ تنگناهایی که برای زنان وجود داشت، باز هم این‌جا و آن‌جا، به استعدادهای درخشان آنان، در زمینهٔ ریاضیات، برمی‌خوریم.

نخستین زنِ ریاضی‌دانی که می‌شناسیم، **هیپاتی** است. او در پایان سدهٔ چهارم و آغاز سدهٔ پنجم میلادی، در اسکندریه می‌زیست. در ریاضیات و فلسفه، شهرت جهانی پیدا کرد. در دورانی که اسکندریه، مرکز دانشمندان تراز اول جهان بود، کُرسی فلسفه را در آن‌جا به دست آورد و، برای مردان و زنان مشتاقی که از سراسر جهان به آن‌جا می‌آمدند، درس می‌داد. به بیان «ب. فِلدبلوم»: «همه را به خاطر منطق ریاضی و استدلال نیرومند خود و عشق بی‌پایانی که به دانش داشت، شگفت‌زده کرده بود. دانش زیاد، بیان روشن و استعداد درخشان هیپاتی، انبوه دوستدارانش را به سوی کلاس‌های او می‌کشاند. ولی برای همه، جای نشستن نبود. انبوه جمعیت، کنار در جمع می‌شدند، در بالکون‌ها و راه‌روها می‌ایستادند و به سخنانی که از درون استاد بیرون می‌آمد، گوش می‌دادند».

و این ترانهٔ یونانی، که برای هیپاتی ساخته شده است، چقدر زیباست:

وقتی، نزدیک منی و سخنت را می‌شنوم،
با نگاهی که به پرهیزگاری نگاه ساکنان ستارگان پاک می‌ماند،
تو را با همهٔ وجودم می‌ستایم، هیپاتی!
هم کار تو، هم زیبایی سخن تو
هم پاکی و پرهیزگاری تو، که به ستارگان می‌ماند
و هم دانش خردمندانهٔ جهانگیر تو را . . .

و سرانجام سرنوشت هیپاتی، چه اندوه‌بار است! از زبان «د.به‌لو» مورخ می‌شویم: «در روزِ روشن، در یکی از خیابان‌های مرکزی اسکندریه، جلو چشمان بسیاری از مردم این شهر کهن، با بی‌رحمی و وحشی‌گری، او را

کشتند. وقتی از کتاب‌خانهٔ اسکندریه برمی‌گشت، انبوه جمعیت خشمگین و خرافاتی، در کمین او بودند. او را از کالسکه پایین کشیدند و کشان کشان، به سوی کلیسا بردند. جمعیت متعصب، با چشمان خون گرفته، دست‌های او را شکستند و بدنش را زیر ضربه‌های سخت خود گرفتند، لباس‌هایش را پاره‌پاره کردند، پوستش را با چاقوهای صدفی کندند و، سرانجام، جسد بی‌جان او را، روی کومهٔ آتش، سوزاندند. به این ترتیب، در یکی از روزهای ماه مارس سال ۴۱۵ میلادی، هیپاتی، یکی از بزرگترین و پرآوازه‌ترین زنان دانشمند را، کشتند. این فاجعه، به دست مردمی وحشی و درنده انجام گرفت که به‌وسیلهٔ «سیریل»، سراسقف اسکندریه، که کارش سازمان دادن و تعقیب افراد «بی‌ایمان» بود، تحریک شده بودند».

□

ابوریحان بیرونی، که هزار سال پیش می‌زیست، در کتاب «التفهیم» خود، که در زمینهٔ ریاضیات و اخترشناسی است ـ می‌نویسد: «... و این یادگار، همچنین کردم مَر ریحانه دختر حسین خوارزمی را، که خواهندهٔ آن بود ...».

زنی علاقه‌مند به یادگیری ریاضیات و اخترشناسی بوده است و ابوریحان بیرونی، «تفهیم» را، به همین منظور و برای او نوشته است.

بهاسکارا، ریاضی‌دان هندی سدهٔ دوازدهم میلادی، کتاب زیبای خود را، به‌نام **لیلاواتی** دختر خود نوشته است که، در واقع، یک کتاب ریاضی است و با زبان شعر و بسیار زیبا و دلنشین سروده شده است.

در همین زمانِ ما، زنان را باید بهترین معلمان ریاضی دانست، چرا که تنها مادران می‌توانند الفبای ریاضی را، در نخستین سال‌های آموزش، به فرزندانشان بیاموزند.

□

نمونهٔ بعد را، از سدهٔ نوزدهم انتخاب می‌کنیم: **سوفیاکووالوسکایا** (۱۸۵۰_۱۸۹۴ میلادی)، ریاضی‌دان بزرگ و پر استعداد روس. زندگی سوفیا، نمونهٔ روشنی است از استعداد ریاضی یک زن در شرایط دردناک نابرابری با مردان. سوفیا، نخستین آشنایی‌های خود را با ریاضیات، به یاری عمویش و، بعد، از روی ورق‌های درس اوستروگرادسکی به دست آورد (پدرش ریاضیات را، پیش اوستروگرادسکی، ریاضی‌دان معروف خوانده بود). در ۱۲ سالگی، آموزش خود را در خانه آغاز کرد، ولی برای ادامهٔ تحصیل، او را به دانشگاه راه ندادند. در روسیهٔ آن زمان، زنان را شایستهٔ ورود به دانشگاه نمی‌دانستند. سوفیا تصمیم گرفت به خارج از روسیه برود، ولی پدرش رضایت نمی‌داد و، برای خروج از کشور، رضایت پدر لازم بود. با ولادیمیر کووالوسکی دانشمند دیرین‌شناس ـ ازدواج مصلحتی کرد و، با ورقهٔ رضایت او، به آلمان رفت. ولی دانشگاه برلن هم، زنان را نمی‌پذیرفت. به تنهایی و پیش خود، دانش ریاضی را دنبال کرد و به جایی رسید که ریاضی‌دانی مشهور شد. بیست‌وچهار ساله بود که دانشگاه گوتینگن (در آلمان)، در غیاب او، دکترای افتخاری فلسفه را به او داد. تلاش کرد تا برای تدریس ریاضی، به کشورش بازگردد، ولی او را به دلیل زن بودن نپذیرفتند. وزیر آموزش تزار می‌گفت: «برای زن، دورهٔ پیری، خیلی زودتر از آن فرا می‌رسد که بتواند اجازهٔ ورود به دانشگاه را داشته باشد». به فرانسه رفت. در آن‌جا هم، به همان دلیل، او را به دانشگاه راه ندادند.

و با همهٔ این‌ها، سوفیا، تا قله‌های ریاضیات بالا رفت و، در زندگی کوتاه خود، افتخارهای فراوانی به دست آورد. سوفیا، ریاضیات را «دانش برتر و رمزآمیزی» می‌دانست که می‌تواند دنیای پر رمز و رازی را ـ که برای آدم‌های عادی قابل درک نیست ـ، در برابر دیدگان او بگستراند.

در سال ۱۸۸۸ میلادی، فرهنگستان علوم پاریس، به خاطر راه‌حلی که سوفیا، برای مسالهٔ مربوط به دَوَران جسم صُلب دور یک نقطهٔ ثابت، پیدا

کرده بود، جایزهٔ خود را به او داد و، به خاطر شهرتی که پیدا کرده بود، فرهنگستان علوم پترزبورگ، او را به عنوان عضو وابستهٔ خود برگزید و . . .

سوفیا، آرزوی جامعه‌ای را داشت که به زبان خود او، در آن‌جا «احساس آرامش و آزادی کند، جایی که زن در کنار مرد و با حقی برابر، بتواند جامعه را به سوی شکوفا شدن نیروهای خلاقه‌اش، هدایت کند».

□

سخن کوتاه، هر کسی می‌تواند ریاضیات را یاد بگیرد. شاید برای ریاضی‌دان شدن، به معنای آفرینندگی در مرزهای ناشناختهٔ ریاضیات، «هنر» و «استعداد» ویژه‌ای لازم باشد، ولی یادگیری ریاضیات، برای هر کسی ممکن است. به‌جز این، استعداد ریاضی، نه به نژاد خاصی تعلق دارد و نه به جنس خاصی. ممکن است انسان‌ها، استعدادهای متفاوتی داشته باشند، ولی اگر به انسان «بی‌استعداد» برخوردید، مطمئن باشید که، یا به دلیل نامتعارف بودن اوست (مثل کسانی که مغزشان در اثر بیماری، یا عدم رشد مغز در دوران بارداری مادر، نتوانسته‌اند رشد عادی خود را داشته باشند) و یا به دلیل محدودیت‌ها و دشواری‌های موجود در محیط اجتماعی او.

۳. چگونه می‌توان به ریاضیات علاقه‌مند شد؟

این، بحثی دراز است و به جنبه‌های گوناگونی بستگی دارد: کتاب درسی، روش تدریس، رفتار معلم، محیط اجتماعی، احساس نیاز دانش‌آموز، . . . ولی در این‌جا، تنها به آن بخش از این عامل‌ها می‌پردازیم که در اختیار خود دانش‌آموز است.

ریشهٔ بیشتر دل‌زدگی‌ها و دوری کردن‌ها، نسبت به ریاضیات را، باید در برخوردهای نخستین ـ در دبستان و راهنمایی ـ جست‌وجو کرد. کتاب‌های درسی، به دلیل ذات خود، بیشتر فشرده و «خشک» تنظیم شده‌اند. ساعت‌های

محدود کلاس ریاضی هم، به معلمی که نگران تمام شدن برنامه است، فرصت کار گسترده‌تر با دانش‌آموزان را نمی‌دهد. و این، البته به شرطی است که هم کتاب درسی خوب نوشته شده باشد و هم معلم «هنر» معلمی را داشته باشد. در چنین شرایطی، تلاش مشخص خود دانش‌آموز است که می‌تواند، تاثیر بخشی از عامل‌های منفی را، از بین ببرد. این تلاش، باید در جهت‌های مختلف و زمینه‌های بسیار گوناگون باشد که، در این‌جا، به برخی از آن‌ها، فهرست‌وار، اشاره می‌کنم.

۱. یکی از سودمندترین راه‌ها، برای علاقه‌مند شدن به ریاضیات، کار جمعی و، دست‌کم، دونفری است. ریاضیات را با هم بخوانید، برای یکدیگر شرح دهید، از هم ایراد بگیرید و، حتا، با هم بیندیشید.

۲. وقتی متوجه شدید، در حل مساله‌ای یا درک مطلبی، دچار اشتباه شده‌اید، خیلی ساده از آن نگذرید. تلاش کنید، دلیل اشتباه خود را پیدا کنید، آیا اشتباه منطقی کرده‌اید؟ آیا صورت مساله را درست نفهمیده‌اید؟ در محاسبه اشتباه کرده‌اید یا در روش حل؟ شاید صورت مساله نامفهوم است؟ و . . .

بسیاری از اشتباه‌ها، نه به استدلال نادرست شما، بلکه به عدم درک مفهوم اصلی مطلب مربوط می‌شود. نمونهٔ ساده‌ای بیاوریم:

از دانش‌آموزی که سال‌های اول دبستان را می‌گذراند، می‌خواهید، ۴۴ را نصف کند و او در پاسخ شما می‌گویند: می‌شود ۴. آیا باید به او پرخاش کرد که، چرا مطلبی به این سادگی را نمی‌داند! نه! او درست اندیشیده است، استدلال او نادرست نیست. او در واقع، پرسش شما را درست نفهمیده است. توجه او به نماد عدد ۴۴ بوده و، با رسم یک خط راست بین دو نماد ۴، شکل نوشتاری عدد ۴۴ را نصف کرده است. استدلال ذهنی او، برای نصف کردن، به معنایی که صورت مساله را فهمیده، درست است. درک نادرست از صورت مساله، به معنای نادرست بودن استدلال او نیست و نمی‌توان به پاسخ او ایراد گرفت. به همین مناسبت، یکی از دلیل‌های اشتباه، عدم درک

درست صورت قضیه یا مساله است: صورت مساله را چند بار بخوانید و تلاش کنید، مفهوم اصلی آن را درک کنید.

۳. کمتر به حافظه تکیه کنید و؛ بیشتر، به روش کار و نحوهٔ استدلال توجه داشته باشید. دربارهٔ معنای ریاضی واژه‌ها و جمله‌هایی که به کار می‌برید، دقت کنید. اگر عادت کرده‌اید، برای انجام عملی مثل $\frac{\frac{۳}{۴}}{\frac{۲}{۵}}$ بگویید «دور در دور، نزدیک در نزدیک»، بیندیشید، این جمله یعنی چه! کدام عمل ریاضی را انجام می‌دهید و، برای این عمل ریاضی، چه کاری مجاز است؟ البته، بهتر است از این جملهٔ بی‌معنی استفاده نکنید و خود عمل را شرح دهید: برای تقسیم عدد $\frac{۳}{۴}$ بر عدد $\frac{۲}{۵}$، باید $\frac{۲}{۵}$ را معکوس کرد و، سپس، در $\frac{۳}{۴}$ ضرب کرد.

وقتی با واژه‌هایی مثل «ضریب»، «اتحاد»، «معادله» و ... روبه‌رو می‌شوید، معنای ریاضی آن‌ها را به یاد بیاورید و، اگر مثلاً متوجه شدید، تعریف درست و دقیق واژهٔ «مزدوج» را نمی‌دانید، قبل از یاد گرفتن آن، به فکر حل مساله نیفتید.

۴. به محض دیدن صورت یک مساله، به سراغ راه حل آن، در کتاب‌های حل مساله‌ها، نروید یا از دبیر آشنای خود نپرسید. تمام تلاش خود را به کار برید تا نیروی خودتان را در حل آن بیازمایید. اگر در چند ساعت کار، تنها روی دو مساله کار کنید، ولو این‌که موفق به حل آن‌ها نشوید، برای شما سودمندتر از آن است که، راه‌حل ۱۰ مساله را، از روی کتاب بخوانید یا از دیگری بپرسید.

۵. از مطالعهٔ کتاب‌های ریاضی غیر درسی غفلت نکنید. به سراغ کتاب‌هایی بروید که دربارهٔ «تاریخ ریاضیات»، «زندگی‌نامهٔ ریاضی‌دانان»،

«کاربردهای ریاضیات»، «فلسفهٔ ریاضیات» و ... نوشته یا ترجمه شده‌اند. مطالعهٔ این کتاب‌ها، دیدگاه شما را گسترش می‌دهد، زیبایی‌های ریاضیات را به شما می‌شناساند و احساس شور و شوقی بی‌اندازه، نسبت به ریاضیات، در شما به وجود می‌آورد.

کتاب‌ها یا مقاله‌هایی هم که به بازی‌ها، سرگرمی‌ها و چیستان‌های ریاضی مربوط می‌شوند، بسیار سودمندند و شما را با ریزه‌کاری های استدلال ریاضی، آشنا می‌کنند.

۶. ریاضیات، به حوصله، مطالعه، تمرین و اندیشه نیاز دارد. ولی برای این‌که خود را به این‌ها عادت دهید، تنها باید اراده کنید، مدتی (نه‌چندان دراز)، به توصیه‌های این مقدمه عمل کنید. در این صورت، به تدریج، چنان به کار علاقه‌مند خواهید شد که، برای جدا شدن از ریاضیات، باید اراده‌ای قوی داشته باشید، نه برای ادامهٔ آن.

□

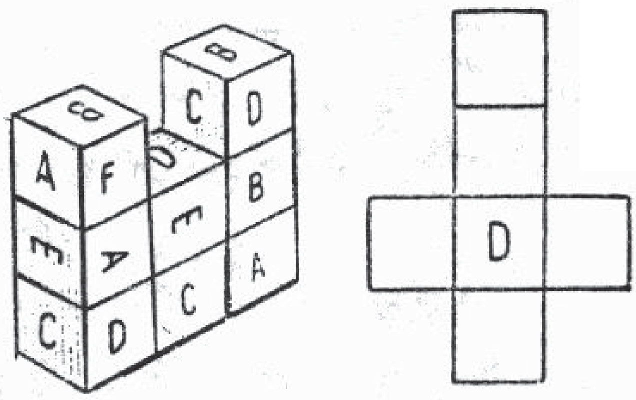
مساله‌هایی که در این‌جا آمده‌اند، بر دو گونه‌اند:

۱) مساله‌هایی برای یادآوری آن‌چه خوانده‌اید و، در برخی موردها، تکمیل آن‌ها؛

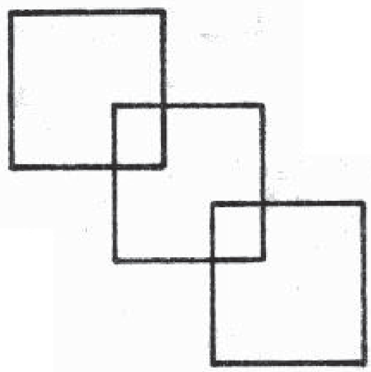
۲) مساله‌هایی که برای تقویت ذهن و اندیشه شماست و، بسیاری از آن‌ها، به هیچ دستور یا قضیهٔ ریاضی نیاز ندارند و، برای حل آن‌ها، تنها باید اندیشید.

تمرین‌ها

۱. هشت مکعبی که در شکل ۱ می‌بینید، یکسان هستند، چه از نظر اندازه و چه از نظر حرف‌هایی که روی وجه‌ها نوشته شده‌است، با هم تفاوتی ندارند.



شکل ۱



شکل ۲

اگر یکی از مکعب‌ها را، آن‌طور که در سمت راست شکل ۱ می‌بینید بگسترانیم، چه حرف‌هایی در وجه‌های آن نوشته شده است؟ چه حرف‌هایی روی قاعده‌های سه مکعب زیرین وجود داد؟

۲. به شکل ۲ توجه کنید. می‌خواهیم، با آغاز از نقطه‌ای روی محیط این شکل و بدون این‌که قلم را از کاغذ جدا کنیم، آن را رسم کنیم با این شرط‌ها: ۱) تمامی پاره‌خط‌های راست رسم شوند؛ ۲) از هیچ پاره‌خط راستی دو بار عبور نکنیم؛ ۳) خط‌هایی را که رسم می‌کنیم، با هم برخورد نداشته باشند.

۳. ممکن است باور نکنید؛ ولی در شهر ما دو نفر زندگی می‌کنند که من، آن‌ها را A و B می‌نامم. A در روزهای دوشنبه، سه‌شنبه و چهارشنبه،

هرگز نمی‌تواند راست بگوید، درحالی که در دیگر روزهای هفته، می‌توان به حرف او اعتماد کرد. ولی B، در روزهای شنبه، سه‌شنبه و پنجشنبه، دروغ می‌گوید، درحالی که در روزهای دیگر هفته قابل اعتماد است و حرف راست می‌زند.

من که این دو نفر را نمی‌شناختم، روزی به آن‌ها برخوردم و از یکی از آن‌ها پرسیدم:

ـ آقا، روزتان به‌خیر، ممکن است بفرمایید افتخار صحبت با چه کسی را دارم؟

ـ من A هستم.

ـ ممکن است بفرمایید، امروز چه روزی از هفته است؟

هم صحبت من پاسخ داد:

ـ دیروز یکشنبه بود.

ولی رفیق او اضافه کرد:

ـ ولی فردا جمعه است.

من که حیرت کرده بودم، رو به رفیق هم‌صحبت خود کردم و گفتم:

ـ صبر کن ببینم اطمینان داری که درست می‌گویی؟

و او در پاسخ گفت:

ـ من چهارشنبه‌ها، همیشه راست می‌گویم.

سپس، هر دو نفر، مرا در میان تردید و تعجب رها کردند و دور شدند، ولی بعد از اندکی اندیشیدن، آن‌ها را شناختم و دانستم، کدام A و کدام B است. به‌جز آن فهمیدم، در چه روزی از هفته، این گفت و شنود انجام شده است. شما هم آزمایش کنید.

۴. دو عدد نابرابر در اختیار داریم. نصف عدد کوچکتر را از هر دو عدد کم کرده‌ایم. یکی از تفاضل‌ها سه برابر دیگری شده است.

عدد بزرگتر، چند برابر عدد کوچکتر است؟

۵. عددی سه رقمی را پیدا کنید که اگر ۷ را از آن کم کنیم بر ۷، اگر ۸ را از آن کم کنیم بر ۸ و اگر ۹ را از آن کم کنیم، بر ۹ بخش‌پذیر باشد.

۶. اتومبیلی، فاصلهٔ بین دو شهر را، به این ترتیب پیمود. تعداد دقیقه‌هایی که در بخش اول مسیر صرف کرد، برابر با تعداد کیلومترهای بخش باقی‌ماندهٔ مسیر و، تعداد دقیقه‌هایی که در بخش دوم راه صرف کرد، برابر تعداد کیلومترهای اول مسیر بود. سرعت متوسط اتومبیل چقدر بوده است؟

۷. آیا می‌توانید با استفاده از هر ده رقم ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ و ۹ (و از هر کدام تنها یک بار)، عدد ۹ را به‌دست آورید؟

۸. این مساله را «تسین تسه زیو_شائو»، ریاضی‌دان چینی، که در سدهٔ سیزدهم میلادی می‌زیست، طرح کرده است:

دور شهری، یک دیوار دایره‌ای شکل کشیده‌اند و دو دروازه، یکی در شمال و دیگری در جنوب، برای آن، در نظر گرفته‌اند. اگر از دروازهٔ شمالی از شهر بیرون برویم و به سوی شمال حرکت کنیم، بعد از ۳۰۰ گام به درختی کهن‌سال می‌رسیم. ولی اگر از دروازهٔ جنوبی بیرون برویم، بعد از پیمودن ۹۰۰ گام به سوی غرب، می‌توانیم همان درخت را ببینیم. فاصلهٔ بین دو دروازهٔ شهر، چند گام است؟

*۹. از حدود ۲۰۰۰ سال پیش، ریاضی‌دانان به مربع‌های وفقی، که به آنها مربع‌های جادویی هم می‌گویند، علاقه‌مند بوده‌اند. جدولی مربع شکل را، وقتی جادویی می‌گویند که، مجموع عددها در خانه‌های هر ردیف افقی آن، با مجموع عددها در خانه‌های هر ردیف عمودی آن با مجموع عددها در خانه‌های هر قطر آن، برابر باشند. ولی در این‌جا، با یک مربع جادویی از

گونهٔ دیگری سروکار داریم (شکل ۳ را ببینید).

۷	۲۵	۱۱	۸	۱۹
۰	۱۸	۴	۱	۱۲
۴	۲۲	۸	۵	۱۶
۹	۲۷	۱۳	۱۰	۲۱
۲	۲۰	۶	۳	۱۴

شکل ۳

در برخورد اول، به نظر می‌رسد، هیچ نظمی یا قانونی، برای عددهای این جدول، وجود ندارد. ولی این جدول، چنان ویژگی جالبی دارد که می‌تواند دوستان شما را به شگفتی وادارد.

در آغاز، ۵ سکهٔ کوچک و ۲۰ تکهٔ کوچک کاغذ، هرکدام به اندازهٔ یکی از خانه‌های مربع آماده کنید و دوستتان را به تماشا وادارید تا، با چشمان خود، به جادویی بودن مربع، اعتقاد پیدا کند.

از دوستتان بخواهید، یکی از عددهای جدول را، به دلخواه، در نظر بگیرد. سکه‌ای را روی این عدد بگذارید و، بعد، روی همهٔ عددهای واقع در ردیف‌های افقی و عمودی همان خانه‌ای که روی عدد آن را سکه گذاشته‌اید، با تکه کاغذهای خود بپوشانید. سپس، از دوستتان بخواهید، یکی دیگر از عددهایی را که دیده می‌شوند، نام ببرد. و شما دوباره، روی این عدد، یک سکه بگذارید و با تکه کاغذها روی عددهایی را که در همان سطر و همان ستون واقع‌اند، بپوشانید. این عمل را، دو بار دیگر تکرار کنید که، در این صورت، تنها یکی از خانه‌های جدول باقی می‌ماند که روی آن، پوشیده نشده است: سکهٔ پنجم خود را، روی همین خانه قرار دهید.

اکنون، پنج سکه را بردارید و عددهای واقع در زیر آن‌ها را با هم جمع کنید. این مجموع، برابر ۵۷ خواهد شد. و این، تصادفی نیست! شما می‌توانستید، از آغاز، پیش‌بینی کنید که دوست شما، به هر ترتیبی عددهای

خود را (در چهار نوبت) انتخاب کند، مجموع عددهای واقع در زیر سکه‌ها، برابر ۵۷ می‌شود.

درست است که دوست شما می‌تواند چهار خانه را، هر طور که بخواهد انتخاب کند، ولی عددهای خانه‌های جدول، به گونه‌ای در نظر گرفته شده‌اند که، مجموع عددهای واقع در پنج خانه، ناگزیر برابر ۵۷ خواهد شد.

دربارهٔ ویژگی عجیب این جدول بیندیشید. آیا می‌توانید، راز آن را برملا کنید؟

۱۰. مجموع رقم‌های یک عدد دو رقمی برابر ۸ است. اگر جای رقم‌های عدد راعوض کنیم، به اندازهٔ ۱۸ واحد بزرگتر می‌شود. عدد را پیدا کنید.

۱۱. محلولی دارای ۳۰٪ اسید ازتیک خالص است و محلول دیگری ۵۵٪ اسید ازتیک خالص دارد. از هرکدام چند لیتر انتخاب کنیم تا از مخلوط آن‌ها، ۱۰۰ لیتر اسید ازتیک ۵۰٪ به دست آورید؟

۱۲. کارگری، کاری را در m ساعت و کارگر دیگری، همان کار را در n ساعت انجام می‌دهد. اگر دو کارگر با هم کار کنند، کار در چند ساعت تمام می‌شود؟

۱۳. دو کارخانه، باید طبق برنامه، روی هم، ۳۶۰ قطعه از یک وسیله را در هر ماه بسازند. کارخانهٔ اول، ۱۱۲٪ و کارخانهٔ دوم، ۱۱۰٪ برنامه را انجام داد و، در نتیجه، دو کارخانه روی هم، ماهی ۴۰۰ قطعه تولید کردند. هریک از دو کارخانه، چند قطعه بیش از برنامه، در هر ماه تولید کرده است.

۱۴. مقدار عددی این عبارت‌ها را پیدا کنید:

$$۱)\ A = \sqrt{۲۸} - \sqrt{۱/۷۵} + ۵\sqrt{\frac{۱}{۸}} + ۶\sqrt{۱۲/۵};$$

$$۲)\ B = ۰/۵\sqrt{۱۰۰۰} - \sqrt{۰/۱۲} + ۰/۴\sqrt{۶/۷۵} -$$

$$-۰/۵\sqrt{۴۰} - ۴۵\sqrt{\frac{۱}{۲۷}}$$

۱۵. این دستگاه‌ها را، به یاری نمودار، حل کنید:

$$۱)\begin{cases} x + y = ۱ \\ x - ۲y = ۴ \end{cases}, \quad ۲)\begin{cases} ۳x + ۲y = ۶ \\ x + ۲y = ۰ \end{cases}$$

۱۶. مختصات نقطه‌های برخورد دو نمودار را (بدون رسم نمودارها)، پیدا کنید:

$$۱)\ y = \frac{۱۲}{x}, y = ۳x;$$

$$۲)\ y = -\frac{۱۸}{x}, ۴x + y = ۶$$

۱۷. بدون رسم نمودارها، بگویید، در هر مورد، نمودارها، چه شباهت‌هایی و چه اختلاف‌هایی با هم دارند:

$$۱)\ y = x^۲; \quad y_۱ = ۲x^۲; \quad y_۱ = \frac{۱}{۲}x^۲;$$

$$۲)\ y = x^۲; \quad y_۱ = -x^۲;$$

$$۳)\ y = x^۲; \quad y_۱ = x^۲ + ۳; \quad y + ۲ = x^۲ - ۲$$

۱۸. به کمک نمودار $y = x^۲$، این معادله‌ها را حل کنید و ریشه‌های آن‌ها را، با دقت تا ۰/۱ تقریب، به دست آورید:

$$۱)\ x^۲ - x - ۴ = ۰; \quad ۲)\ x^۲ + x - ۵ = ۰$$

۱۹. قیمت پارچه‌ای که متری ۱۶۰۰ ریال بود، چند درصد ارزان‌تر شد. بعد از مدتی، باز هم، قیمت پارچه به اندازه همان درصد قبلی ارزان‌تر شد

و به متری ۹۰۰ ریال رسید. قیمت پارچه، هربار، چند درصد، ارزان‌تر شده است؟

۲۰. دو دایره از بیرون بر یکدیگر مماس‌اند. فاصلهٔ بین دو مرکز دایره‌ها برابر ۱۴ سانتی‌متر و مجموع مساحت‌های آن‌ها، برابر (۱۳۰π) سانتی‌متر مربع است. شعاع هر دایره را محاسبه کنید.

۲۱. قایق موتوری تصمیم داشت فاصلهٔ ۷۲ کیلومتری را با سرعت معینی بپیماید. ولی نیمی از راه را با سرعت ساعتی ۳ کیلومتر کمتر از آن و نیم دوم مسیر را با سرعت ساعتی ۳ کیلومتر بیشتر از آن حرکت کرد و ۵ ساعت در راه بود. نسبت به قرار نخستین خود، چند دقیقه تأخیر می‌کند؟

۲۲. جهانگرد ۶۲/۵٪ از ۱۶۰ کیلومتر را با اتومبیل و بقیهٔ راه را با قایق موتوری پیمود. سرعت قایق موتوری ۲۰ کیلومتر در ساعت کمتر از سرعت اتومبیل است؛ مدت زمانی که جهانگرد در اتومبیل بود، ۱۵ دقیقه بیش از مدت زمانی بود که با قایق حرکت می‌کرد. سرعت اتومبیل و سرعت قایق را پیدا کنید.

۲۳. وقتی راننده، نیمی از راه را در یک ساعت پیمود، به سرعت خود ساعتی ۱۵ کیلومتر افزود و بقیه راه را در ۴۵ دقیقه به پایان رسانید. سرعت اتومبیل در نیمهٔ نخست راه، چقدر بوده است؟

۲۴. این دستگاه‌ها را حل کنید:

$$۱)\begin{cases} bx + ay = \dfrac{a}{b} \\ ax - by = \dfrac{b}{a} \end{cases} \quad ; \quad ۲)\begin{cases} x^۲ + y^۲ = ۵ \\ x - y = ۱ \end{cases}$$

$$۳)\begin{cases} x^۳ + y^۳ = ۲۶ \\ x + y = ۲ \end{cases} \quad ;$$

*۲۵. الف) از بین یک گروه ۵ نفری، به چند طریق می‌توان ۲ نفر را، برای انجام کاری انتخاب کرد؟

ب) از یک گروه ۶ نفری به چند طریق می‌توان ۳ نفر را، برای انجام یک کار، انتخاب کرد؟

*۲۶. شش نفر به تصادف به هم رسیده‌اند. ثابت کنید، دست‌کم دو گروه سه نفری (که می‌توانند در یک یا دو عضو مشترک باشند) می‌توان در بین آن‌ها پیدا کرد، به نحوی که در هر گروه، یا هر سه نفر یکدیگر را بشناسند و یا هیچ دو نفری با هم آشنا نباشند.

۲۷. حاصل $(x+۱)^۶$ را به‌دست آورید. چگونه می‌توان به یاری آن‌چه به دست آورده‌اید، حاصل $(x-۱)^۶$ را نوشت؟

۲۸. معادلهٔ خط راستی را به ما داده‌اند، به نحوی که ضریب‌ها، برحسب پارامتر a مشخص شده‌اند و، بنابراین، مُعرف بی‌نهایت خط راست است (برای هر عدد حقیقی a، یک خط راست به دست می‌آید). آیا، در هر حال، این خط‌های راست از یک نقطهٔ ثابت می‌گذرند؟

۲۹. الف) سه‌جمله‌ای $x^۲-x+۱۱$ را نمی‌توان به صورت ضرب دو عامل درجه اول (با ضریب‌های حقیقی) تجزیه کرد. آیا، این وضع به معنای آن است که، این سه جمله‌ای، وقتی x عددی طبیعی باشد، عددی اول است؟

ب) $x+۵$، در تقسیم بر $x+۳$، دارای باقی‌مانده است، یعنی $x+۵$ بر $x+۳$ بخش‌پذیر نیست. آیا، این وضع، به معنای آن است که، بافرض $x \in \mathbf{Z}$، هرگز $x+۵$ بر $x+۳$ بخش‌پذیر نیست؟

*۳۰. عدد طبیعی m چگونه باشد تا عبارت

$$(x+y+z)^m-x^m-y^m-z^m$$

بر عبارت $(x+y+z)^۳-x^۳-y^۳-z^۳$ بخش‌پذیر باشد؟

۳۱. ثابت کنید، همهٔ نمودارهای سهمی‌هایی که با معادلهٔ عمومی

$$y=-ax^۲+(a-۱)x-۲$$

داده شده‌اند، از دو نقطهٔ ثابت می‌گذرند. مختصات این دو نقطهٔ ثابت را پیدا کنید.

۳۲. معادلهٔ دو خط راست داده شده است:

$$x - y + ۳ = ۰ \text{ و } ۲x + y - ۹ = ۰$$

بدون این‌که مختصات نقطهٔ برخورد نمودارهای این دو خط راست را پیدا کنید

الف) معادلهٔ خط راستی را بنویسید که از نقطه $A(-۲, ۰)$ و نقطهٔ برخورد این دو خط راست بگذرد.

ب) معادلهٔ خط راستی را بنویسید که از نقطهٔ برخورد این دو خط راست بگذرد و بر خط راست $۲x + ۳y = ۰$ عمود باشد.

۳۳. کدام بزرگترند، A یا B؛ به شرطی که

$$A = \sqrt{۱} + \sqrt{۳} + \sqrt{۵} + \sqrt{۷} + \sqrt{۹},$$
$$B = \sqrt{۲} + \sqrt{۴} + \sqrt{۶} + \sqrt{۸} + \frac{۱}{۲}\sqrt{۱۰}$$

۳۴*. عددهای طبیعی p، q و r از ۱۰۰ کوچکترند و می‌دانیم:

$$p^۲ + q^۲ = r^۲$$

در سمت چپ هریک از عددهای p، q و r، رقم k را قرار می‌دهیم و عددهای جدید را a، b و c می‌نامیم. اگر داشته باشیم:

$$a^۲ + b^۲ = c^۲$$

عددهای p، q و r و رقم k را پیدا کنید.

۳۵. ثابت کنید، عدد $۱ + ۲^{۹۴}$ بر عدد $۱ + ۲^{۲۴} + ۲^{۴۷}$ بخش‌پذیر است.

۳۶. دو نقطهٔ A و B به فاصلهٔ ۸ سانتی‌متر از یکدیگر واقع‌اند. روی صفحه‌ای که از نقطه‌های A و B گذشته است، دو خط راست موازی با هم رسم کنید که یکی از آن‌ها از A و دیگری از B گذشته باشد و فاصلهٔ آن‌ها از یکدیگر برابر ۲ سانتی‌متر باشد.

۳۷. به کمک دستگاه محورهای مختصات، ثابت کنید:

الف) اگر در یک چهارضلعی غیر مشخص، نقطه‌های وسط چهار ضلع را به هم وصل کنیم، یک متوازی‌الاضلاع به دست می‌آید.

ب) از برخورد نیمسازهای زاویه‌های داخلی هر مستطیل، یک مربع پدید می‌آید.

*۳۸. ثابت کنید $۲^{۲^۵} + ۱$ بر ۶۴۱ بخش‌پذیر است.

۳۹. این عبارت را، برحسب توان‌های نزولی $۲x + ۱$ منظم کنید:

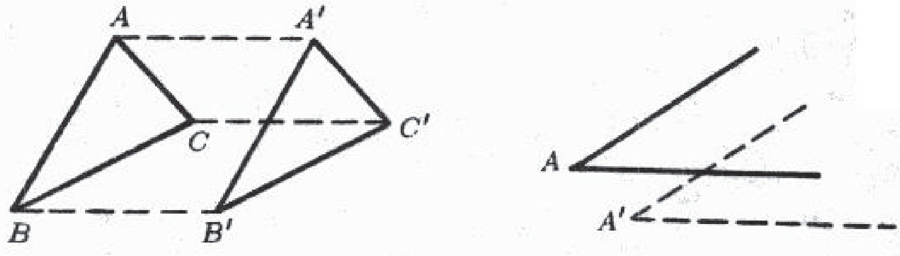
$$A = ۱۶x^۴ - ۲۴x^۳ + ۴x^۲ - ۱۰x + ۱$$

۱. انتقال محورهای مختصات و پیدا کردن محور تقارن و مرکز تقارن یک نمودار

۱§. انتقال محورها

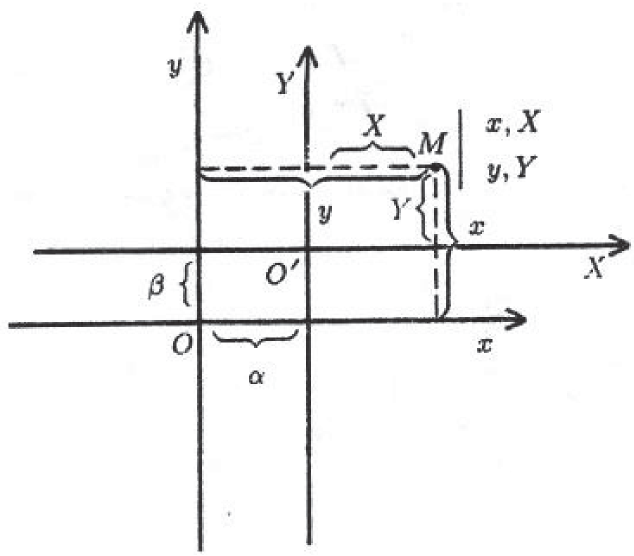
۱. **مفهوم انتقال خط راست.** در ریاضیات، وقتی از انتقال یک خط راست صحبت می‌شود، منظور جابه‌جا کردن این خط راست است، به نحوی که با امتداد نخستین خود موازی باشد: *هرگاه، خط راستی را موازی با خودش جابه‌جا کنیم، گوییم آن را انتقال داده‌ایم.*

به همین ترتیب، انتقال یک زاویه یا یک شکل هندسی، به معنای جابه‌جا کردن زاویه یا شکل در صفحه است، به شرطی که هر ضلع زاویه و یا هر عنصر خطی شکل هندسی، موازی با خودش جابه‌جا شده باشد.



شکل ۴

در شکل ۴، زاویهٔ A' از انتقال زاویهٔ A و مثلث $A'B'C'$ از انتقال مثلث ABC به دست آمده است.



شکل ۵

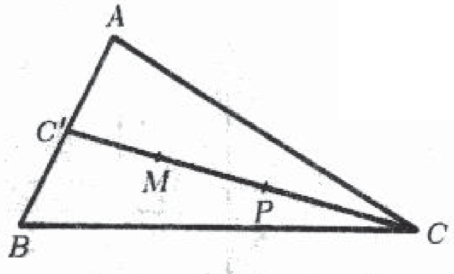
۲. انتقال محورهای مختصات. ضمن انتقال محورهای مختصات، مبداء جابه‌جا می‌شود و محورها موازی و هم جهت با حالت نخستینِ خود خواهند بود.

در شکل ۵، دستگاه محورهای مختصات را انتقال داده‌ایم، به نحوی که مبداء o، به‌جای تازهٔ خود o' با مختصات (α, β) رفته است، یعنی محور $x'x$ به اندازهٔ β و محور $y'y$ به اندازه α و موازی امتداد نخستینِ خود جابه‌جا شده‌اند و دستگاه محورهای مختصات xoy به وضع تازه خود $Xo'Y$ درآمده است، به نحوی که مختصات نقطهٔ o' (مبداء تازه) نسبت به دستگاه xoy، برابر (α, β) است.

شکل ۵، به روشنی نشان می‌دهد که، چگونه می‌توان مختصات تازهٔ نقطهٔ M، یعنی (X, Y) را بر حسب مختصات نخستین آن (x, y) پیدا کرد:

$$X = x - \alpha, \quad Y = y - \beta \qquad (۱)$$

و یا، اگر مختصات نقطه M در دستگاه xoy را بر حسب مختصات آن در



شکل ۶

دستگاه $Xo'Y$ بخواهیم:

$$x = X + \alpha, \quad y = Y + \beta \qquad (۲)$$

یادداشت. در شکل ۵، جابه‌جایی محورهای مختصات را، به صورت ویژه‌ای نشان داده‌ایم (مختصات مبداء تازه، یعنی (α, β) را مثبت گرفته‌ایم). خودتان چند شکل دیگر رسم کنید و انتقال محورهای مختصات را، به صورت‌های دیگری انجام دهید و، روشن کنید، در هر حالت، دستورهای (۱) و (۲) درست‌اند.

مثال ۱. *نقطه‌های* $A(-۱, -۳)$، $B(۳, -۱)$ *و* $C(۵, ۴)$ *داده شده‌اند. محورهای مختصات را موازی با خود جابه‌جا کرده‌ایم تا نقطهٔ* o'، *مبداء تازه، در نقطهٔ برخورد میانه‌های مثلث* ABC *قرار گیرد. مختصات راس‌های مثلث را در دستگاه تازهٔ محورهای مختصات* ($Xo'Y$) *پیدا کنید.*

حل. میانه‌های مثلث، در نقطه‌ای که یکدیگر را قطع می‌کنند، هر میانه به نسبت ۱ : ۲ تقسیم می‌کنند.

اگر CC' یکی از میانه‌های مثلث و M نقطهٔ برخورد میانه‌ها باشد (شکل ۶)، آن وقت $|CM| = ۲|MC'|$؛ یعنی اگر وسط پاره‌خط راست CM را P بنامیم، داریم:

$$|CP| = |PM| = |MC'|$$

P وسط پاره‌خط راست CM و M وسط پاره‌خط راست PC' است.

بنابراین داریم:

$$\begin{cases} ۲x_M = x_P + x_{C'} \\ ۲x_P = x_M + x_C \end{cases}$$

که اگر دو برابر برابری اول را با برابری دوم جمع کنیم، به دست می‌آید:

$$x_M = \frac{x_C + ۲x_{C'}}{۳} = \frac{۷}{۳}$$

(C' وسط پاره‌خط راست AB است و مختصاتی برابر $(۱, -۲)$ دارد). به همین ترتیب عرض نقطهٔ M به دست می‌آید:

$$y_M = \frac{y_C + ۲y_{C'}}{۳} = ۰$$

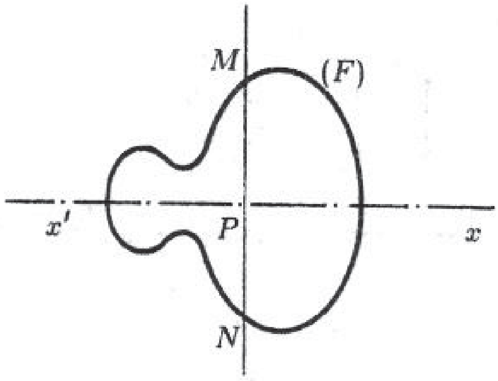
مبداء مختصات، به نقطهٔ $M\left(\frac{۷}{۳}, ۰\right)$ منتقل شده است. در برابری‌های (۱) داریم: $\alpha = \frac{۷}{۳}$ و $\beta = ۰$. مختصات تازهٔ راس‌های مثلث، با توجه به دستورهای (۱) به دست می‌آید (خودتان محاسبه کنید).

پاسخ. $A\left(-\frac{۱۰}{۳}, -۲\right)$، $B\left(\frac{۲}{۳}, -۱\right)$ و $C\left(\frac{۸}{۳}, ۴\right)$.

مثال ۲. *معادلهٔ یک‌سهمی، در دستگاه محورهای مختصات xoy به صورت $y = x^۲$ است. اگر دستگاه محورها را طوری انتقال دهیم که، مبداء تازه، در نقطهٔ $o'(-۳, ۲)$ قرار گیرد، معادلهٔ تازهٔ این نمودار را پیدا کنید.*

حل. اگر مختصات نقطه‌ای از نمودار را در دستگاه نخستین با (x, y) و در دستگاه تازه با (X, Y) نشان دهیم، برابری‌های (۲) بستگی بین آن‌ها را به ما می‌دهند؛ درضمن، $\alpha = -۳$ و $\beta = ۲$ است. بنابراین، اگر در معادلهٔ $y = x^۲$، x را به $X - ۳$ و y را به $Y + ۲$ تبدیل کنیم، معادلهٔ جدید نمودار پیدا می‌شود.

$$y = x^۲ \Rightarrow Y + ۲ = (X - ۳)^۲$$



شکل ۷

پاسخ. $Y = X^۲ - ۶x + ۷$.

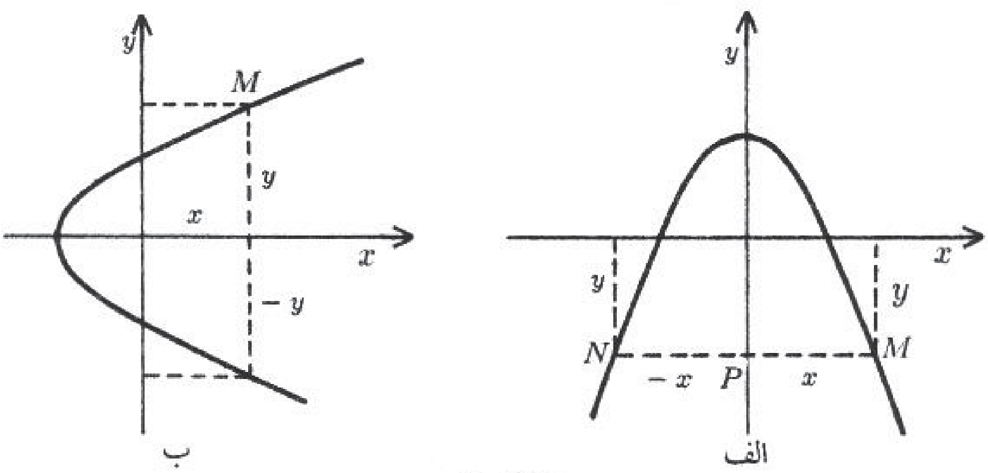
۲§. محورهای تقارن

۱. محور تقارن یک شکل در روی صفحه. به شکل ۷ توجه کنید. خط راست $x'x$ چنان است که، اگر از نقطه‌ای مثل P واقع بر آن، خط راستی عمود بر آن رسم کنیم و، این عمود، شکل ما را در دو نقطهٔ M و N قطع کند و بدانیم پاره‌خط‌های راست MP و PN طول‌هایی برابر دارند، آن وقت خط راست $x'x$ را محور تقارن شکل گویند. به زبان دیگر، اگر صفحهٔ کاغذ را روی خط راست $x'x$ تا کنیم، دو نیمهٔ بالا و پایین شکل، به طور کامل روی هم قرار می‌گیرند.

به عنوان نمونه، امتداد ارتفاع وارد بر قاعده، در مثلث متساوی‌الساقین، محور تقارن مثلث است (بگویید چرا؟).

تعریف دیگری برای محور تقارن یک شکل: خط راست $x'x$ را محور تقارن شکل F گوییم وقتی که، اگر از نقطهٔ دلخواه M واقع بر شکل F، عمود MP را بر $x'x$ رسم کنیم و امتداد دهیم تا F را در نقطهٔ دوم N قطع کند، آن وقت داشته باشیم: $|MP| = |PN|$.

۲. تقارن نسبت به محور عرض‌ها. به شکل ۸ـالف توجه کنید. محور



شکل ۸

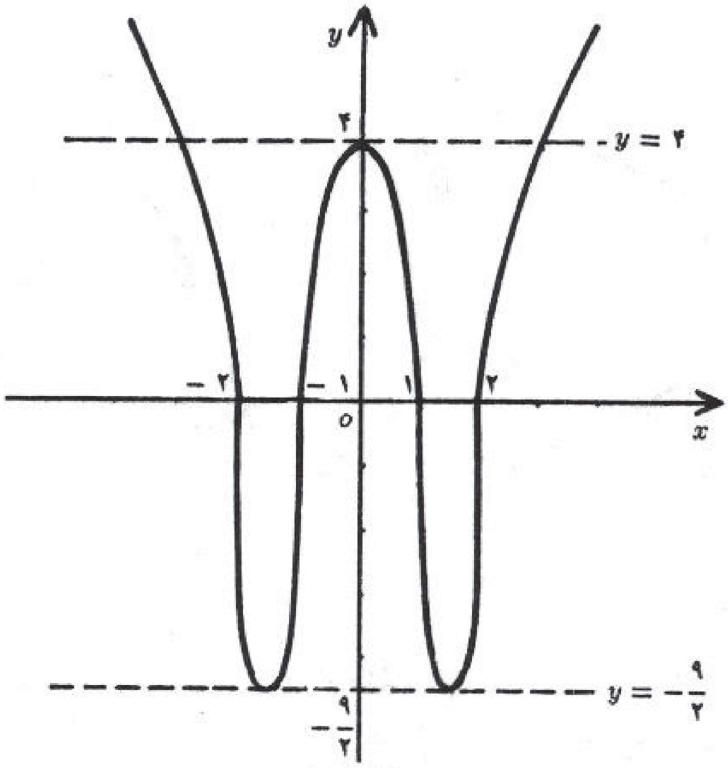
$y'y$ محور تقارن نموداری است که روی دستگاه محورهای مختصات رسم شده است. با توجه به تعریف محور تقارن و با توجه به شکل ۸ـالف، اگر نقطه‌های M و N، که بر نمودار واقع‌اند، عرض‌هایی برابر داشته باشند ($y_M = y_N$)، آن وقت باید طول‌هایی قرینهٔ یکدیگر داشته باشند ($X_M = -x_N$). به زبان ساده‌تر: محور $y'y$ *وقتی محور تقارن یک نمودار است که، اگر در معادلهٔ نمودار، x را به $-x$ تبدیل کنیم، مقدار y تغییر نکند.*

عکس این حکم هم درست است: *اگر در معادلهٔ یک نمودار، با تبدیل x به $-x$، تغییری در معادله پدید نیامد، به معنای آن است که محور عرض ($y'y$)، محور تقارن نمودار این معادله است.*

معادلهٔ $y = ۳ - x^۲$، با تبدیل x به $-x$ تغییر نمی‌کند، بنابراین محور $y'y$ محور تقارن نمودار $y = ۳ - x^۲$ است. می‌گوییم:

نمودار $y = ۳ - x^۲$، *نسبت به محور عرض‌ها، متقارن است؛ یا محور عرض‌ها محور تقارن نمودار* $y = ۳ - x^۲$ *است.*

یادداشت. خط راست موازی با محور $x'x$ (یعنی عمود بر $y'y$) ممکن است نمودار را در ۲، ۴ یا به طور کلی $۲n$ نقطه قطع کند. در این صورت وقتی محور $y'y$ محور تقارن نمودار است که، این نقطه‌ها، دو به دو، نسبت



شکل ۹

به محور عرض‌ها قرینهٔ یکدیگر باشند.

در حالتی که خط راست موازی محور $x'x$ نمودار معادله را، در ۱، ۳، یا به طور کلی $2n + 1$ نقطه $(n \in \mathrm{N})$ قطع کند، به شرطی محور $y'y$ محور تقارن نمودار معادله است که، یکی از نقطه‌های برخورد روی محور عرض‌ها و بقیه نسبت به محور عرض، دو به دو قرینهٔ یکدیگر باشند.

مثال ۳. *این معادله را در نظر می‌گیریم:*

$$y = x^{4} - 5x^{2} + 4$$

نمودار این معادله، نسبت به محور $y'y$ متقارن است، زیرا معادلهٔ آن، با تبدیل x به $-x$ تغییر نمی‌کند. نمودار را در شکل ۹ داده‌ایم.

از برخورد خط راست $y = 40$ (که با محور $x'x$ موازی است) با نمودار، دو نقطه به دست می‌آید:

$$\begin{cases} y = x^{4} - 5x^{2} + 4 \\ y = 40 \end{cases} \Rightarrow x^{4} - 5x^{2} - 36 = 0$$

از آن‌جا، برای $x^۲$، دو جواب ۹ و ۴− به دست می‌آید. از معادلهٔ $x^۲ = -۴$، جوابی حقیقی پیدا نمی‌شود؛ ولی $x^۲ = ۹$، منجر به دو جواب $x = ۳$ و $x = -۳$ می‌شود و ۳ و ۳− قرینهٔ یکدیگرند.

از برخورد خط راست $y = ۴$ با نمودارِ ما، سه نقطه با طول‌های ۰ و $\pm\sqrt{۵}$ به دست می‌آید که نقطهٔ به طول ۰ روی محور عرض‌ها (محور تقارن) است و دو نقطهٔ دیگر طول‌هایی قرینهٔ هم دارند.

از برخورد خط راست $y = ۰$ (محور $x'x$) با نمودار ما، چهار نقطه به طول‌های ± ۱ و ± ۲ به دست می‌آیند که هم ۱+ و ۱− و هم ۲+ و ۲− قرینه یکدیگرند.

۳. تقارن نسبت به محور طول‌ها. در این‌جا نیازی به توضیح اضافی نداریم. باید همان توضیح قبلی را، با عوض کردن نقش x و y با یکدیگر، تکرار کنیم (شکل ۸ـب)

اگر معادله‌ای، با تبدیل y به $-y$ تغییر نکند، محور $x'x$، محور تقارن نمودار آن است.

نمودار هریک از معادله‌های $x = y^۲$ و $x = \cos y + ۱$، محور تقارنی دارد که بر محور $x'x$ منطبق است.

یادداشت. اگر عبارتی جبری یا مثلثاتی چنان باشد که، با تبدیل یکی از مجهول‌های خود به قرینه‌اش، تغییر نکند، گویند این عبارت، نسبت به این مجهول زوج است. مثلاً عبارت‌های

$$۲x^۴ - x^۲ + ۷, x^۲ + |x|, ۲ - \cos x$$

نسب به x، عبارت‌هایی زوج هستند. به این ترتیب: اگر معادلهٔ یک نمودار، نسبت به x زوج باشد، محور $y'y$ محور تقارن نمودار آن است؛ همچنین، اگر معادلهٔ یک نمودار، نسبت به y زوج باشد، محور $x'x$ محور تقارن آن است.

ممکن است معادله‌ای مثل $x^۲ + y^۲ = ۱$ یا $۳x^۲ - ۲y^۴ = ۵$، هم نسبت به x و هم نسبت به y زوج باشد، در این صورت، هر دو محور $y'y$ و $x'x$ محورهای تقارن نمودارهای این معادله‌ها هستند.

۴. وقتی محور تقارن موازی محور عرض‌ها باشد. اگر خط راست $x = a$ را که موازی محور $y'y$ است، موازی با خود جابه‌جا کنیم تا مبداء تازه بر نقطهٔ $o'(a, ۰)$ قرار گیرد، باید معادلهٔ تازهٔ نمودار چنان باشد که با تبدیل x به $-x$، تغییر نکند.

مثال ۴. *ثابت کنید نمودار معادلهٔ:*

$$y = x^۲ - ۴x + ۱$$

محور تقارنی موازی با محور $y'y$ دارد. معادلهٔ این محور تقارن را پیدا کنید.

حل. معادلهٔ محور تقارن را $x = a$ می‌گیریم و، مبداء مختصات را، به نقطهٔ $o'(a, ۰)$ منتقل می‌کنیم، باید معادلهٔ تازه‌ای که برای نمودار به دست می‌آید، نسبت به x زوج باشد، یعنی با تبدیل x به $-x$ تغییر نکند.

برابری‌های مربوط به انتقال محورها را مورد استفاده قرار می‌دهیم. اگر معادلهٔ تازهٔ نمودار را با X و Y نشان دهیم، باید داشته باشیم:

$$x = X + a, y = Y + ۰ = Y$$

که اگر در معادلهٔ مورد نظر قرار دهیم، معادلهٔ تازهٔ نمودار به دست می‌آید:

$$Y = (X + a)^۲ - ۴(X + a) + ۱ =$$
$$= X^۲ + ۲(a - ۲)X + a^۲ - ۴a + ۱$$

$X^۲$ با تبدیل X به $-X$ تغییر نمی‌کند؛ $a^۲ - ۴a + ۱$ هم مقداری ثابت است (و به طور طبیعی، با تبدیل X به $-X$ بدون تغییر می‌ماند.) ولی

جملهٔ $۲(a - ۲)X$ با تبدیل X به $-X$ تغییر می‌کند و به قرینهٔ خود تبدیل می‌شود. بنابراین، اگر بخواهیم عبارت:

$$X^۲ + ۲(a - ۲)X + a^۲ - ۴a + ۱$$

نسبت به X، زوج باشد، باید جملهٔ $۲(a - ۲)X$ را نداشته باشد، یعنی ضریب X در آن، برابر صفر شود:

$$۲(a - ۲) = ۰ \Rightarrow a - ۲ = ۰ \Rightarrow a = ۲$$

خط راست $x = ۲$ محور تقارن نمودار معادلهٔ مسالهٔ ماست.

۵. مرکز تقارن. در هندسه، نقطه‌ای را مرکز تقارن یک شکل گویند که، اگر خط راستی از این نقطه بگذرانیم تا شکل را در دو نقطه قطع کند، این نقطه وسط پاره‌خط راستی باشد که دو نقطهٔ برخورد را به هم وصل کرده است. مثلاً مرکز دایره، مرکز تقارن آن است و یا، مرکز شش ضلعی منتظم (نقطهٔ برخورد سه قطر بزرگ آن) مرکز تقارن آن است.

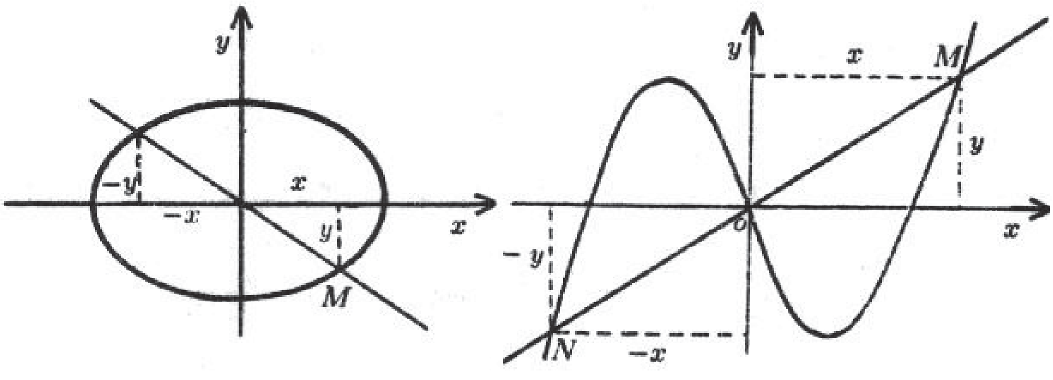
برای مرکز تقارن می‌توان گفت: *هر خط راستی که از مرکز تقارن عبور کند و شکل را در دو نقطهٔ A و B قطع کند، مرکز تقارن در وسط پاره‌خط راست AB قرار می‌گیرد.*

۶. مرکز تقارن در دستگاه محورهای مختصات. در شکل ۱۰ (الف و ب)، مبداء مختصات مرکز تقارن شکل است. به یاری شکل‌ها به سادگی روشن می‌شود:

وقتی مبداء مختصات مرکز تقارن یک نمودار است که، در معادلهٔ نمودار، با تبدیل x به $-x$، y به $-y$ تبدیل می‌شود و برعکس.

و یا به زبان دیگر:

هرگاه مبداء مختصات، مرکز تقارن منحنی باشد، اگر در معادلهٔ منحنی، x را به $-x$ و y را به $-y$ تبدیل کنیم، همان معادلهٔ قبلی به دست می‌آید و برعکس،



ب   الف

شکل ۱۰

یادداشت ۱. وقتی در یک عبارت با تبدیل مجهول به قرینه خود، عبارت اصلی هم به قرینهٔ خود تبدیل شود، گویند این عبارت نسبت به مجهول خود، **فرد** است. عبارت‌های

$$۲x^۳ - x, \frac{x^۲ + ۱}{x}, \sin x - \mathrm{tg} x$$

نسبت به x فرد هستند؛ و این به معنای آن است که نمودارهای مربوط به:

$$y = x^۳ - x, y = \frac{x^۲ + ۱}{x}, y = \sin x - \mathrm{tg} x$$

نسبت به مبداء مختصات، متقارن‌اند.

یادداشت ۲. مرکز تقارن یک شکل می‌تواند نقطه‌ای واقع بر شکل و یا نقطه‌ای واقع در بیرون شکل باشد. در شکل ۱۰ـالف، مبدا مختصات (که مرکز تقارن منحنی است) نقطه‌ای از خود منحنی است، در حالی که در شکل ۱۰ـب (بیضی) مرکز تقارن، در بیرون منحنی است.

مثال ۵. *ثابت کنید، نمودار معادلهٔ*

$$y = \frac{x + ۱}{x - ۱}$$

دارای یک مرکز تقارن است. مختصات این مرکز تقارن را پیدا کنید.

حل. مرکز تقارن منحنی را $\omega(a,b)$ می‌نامیم. اگر مبداء مختصات را، به نقطهٔ ω منتقل کنیم، برای منحنی، باید به معادله‌ای برسیم که، نسبت به x فرد باشد، یعنی با تبدیل x به $-x$ و y به $-y$، تغییر نکند.

اگر مختصات نقطه‌های منحنی را در دستگاه تازهٔ محورهای مختصات، با (X,Y) نشان دهیم، بنابر برابری‌های مربوط به انتقال محورها، باید داشته باشیم:

$$x = X + a, y = Y + b$$

بنابراین، معادلهٔ منحنی، در دستگاه تازه، چنین می‌شود:

$$Y + b = \frac{X + a + ۱}{X + a - ۱} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow XY + (b - ۱)X + (a - ۱)Y + (ab - a - b - ۱) = ۰$$

در این معادله، اگر X به $-X$ و Y به $-Y$ تبدیل شود، جمله‌های:

$$XY, (ab - a - b - ۱)$$

تغییر نمی‌کنند، ولی جمله‌های:

$$(b - ۱)X, (a - ۱)Y$$

تغییر علامت می‌دهند. بنابراین، برای این‌که معادله بی تغییر بماند، باید داشته باشیم:

$$\left| \begin{array}{l} b - ۱ = ۰ \\ a - ۱ = ۰ \end{array} \right| \Rightarrow \left| \begin{array}{l} a = ۱ \\ b = ۱ \end{array} \right.$$

یعنی، مرکز تقارن منحنی مفروض، در نقطهٔ $\omega(۱,۱)$ است و معادلهٔ منحنی نسبت به دستگاهی که، مبداء آن، در نقطهٔ ω باشد، به صورت $Y = \frac{۲}{X}$ درمی‌آید که، با تبدیل X به $-X$ و Y به $-Y$ تغییر نمی‌کند.

□

*یوگراف‌سته‌پانوویچ فه‌دوروف (۱۸۵۳_۱۹۱۹ میلادی)، هندسه‌دان و بلورشناس، از سال‌های جوانی روی گونه‌های مختلف بلورها کار می‌کرد. او در سال‌های از ۱۸۸۵ تا ۱۸۹۰، تمام تلاش خود را روی این مساله متمرکز کرد. کار را روی شکل‌های فضایی و بدون توجه به بلورها و اتم‌ها و مولکول‌ها انجام می‌داد، یعنی یک کار خالص هندسی. او می‌خواست بداند، جسم‌های متقارن هندسی، چند گونه‌اند! و، سرانجام، در سال ۱۸۹۰ میلادی، مقالهٔ خود را، با عنوان «تقارن دستگاه‌های منتظم» منتشر کرد که، در آن، نتیجه گرفته بود که، تعداد همهٔ جسم‌های متقارن هندسی، در کل دستگاه جسم‌های هندسی، ۲۳۰ گونه‌اند ... و در واقع، تعداد گونه‌های مختلف بلورها هم، برابر ۲۳۰ است.

این نتیجه‌گیری جالب، نه‌تنها مسالهٔ دشواری از هندسه را حل کرد و راه را برای حل مساله‌های دیگری گشود، به روشنی نشان داد که، چگونه می‌توان از یک پژوهش خالص ریاضی، نتیجه‌ای کاربردی به دست آورد.

واژهٔ تقارن، ترجمه‌ای از واژهٔ یونانی symmetrio، به معنای هم‌خوانی و توازن است و هم در جبر (برای عبارت‌های متقارن) و هم در هندسه (برای شکل‌های متقارن) به کار می‌رود.

طبیعت پر از تقارن است و، به همین دلیل، مفهوم و ویژگی‌های تقارن، در بسیاری از دانش‌ها (هنرهای گوناگون، گیاه‌شناسی، زیست‌شناسی، بلورشناسی، شیمی، فیزیک و به‌ویژه ساختمان مولکولی و غیره) کاربرد دارد.

افلاطون، فیلسوف باستانی یونان، تقارن را با زیبایی یکی می‌دانست. او بود که، برای نخستین بار، چندوجهی‌های منتظم را که مکعب، ساده‌ترین آن‌ها است و دارای ۶ محور تقارن، یک مرکز تقارن و ۳ صفحهٔ تقارن است پیدا و آن‌ها را نام‌گذاری کرد. افلاطون، دایره را زیباترین شکل در روی صفحه و کره را زیباترین شکل در فضا می‌دانست، زیرا این‌ها، متقارن‌ترین شکل‌های

هندسی‌اند.

ابوریحان بیرونی، روی گل‌ها و تقارن گلبرگ‌ها کار کرد و برخی ویژگی‌های آن‌ها را به دست آورد.

تمرین‌ها

۴۰. کدامیک از این شکل‌های هندسی، دارای محور یا مرکز تقارن است:

۱) مثلث متساوی‌الساقین؛ ۲) مثلث متساوی‌الاضلاع؛ ۳) پاره‌خط راست؛ ۴) خط راست؛ ۵) نیم‌خط راست؛ ۶) مثلث قائم‌الزاویه؛ ۷) مستطیل؛ ۸) لوزی؛ ۹) مربع؛ ۱۰) ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین؛ ۱۱) دایره؛ ۱۲) نشانهٔ بی‌نهایت (∞).

۴۱. ثابت کنید، اگر شکلی دارای دو محور تقارن عمود بر هم باشد، نقطهٔ برخورد این دو عمود، مرکز تقارن شکل است.

آیا عکس این حکم درست است؟ یعنی، اگر یک شکل دارای مرکز تقارن باشد، دارای دو محور تقارن عمود بر هم است؟

۴۲. روشن کنید، نمودار کدامیک از این معادله‌ها، محور تقارنی موازی محور عرض دارند:

$$۱)\ y = x^۲ + x + ۱;\quad ۲)\ y = -\frac{۱}{x^۲ + ۱};\quad ۳)\ y = x^۲ + |x|;$$

$$۴)\ y = x^۲ + |x + ۲| + ۴(x + ۱)$$

۴۳. مختصات مرکز تقارن را (اگر وجود دارد)، در نمودار هر یک از معادله‌های زیر پیدا کنید:

$$۱)\ y = x;\quad ۲)\ y = x^۳ + ۳x;\quad ۳)\ y = x^۳ + ۱;$$

$$۴)\ y = \frac{۲x + ۱}{x};\quad ۵)\ y = \frac{۱}{۲x + ۳};\quad ۶)\ y = x^۳ + ۳x^۲$$

۴۴. محور تقارن نمودار معادلهٔ

$$y = x^۲ + |x - ۳| - ۶x + ۷$$

را پیدا و، سپس، نمودار را رسم کنید.

***۴۵. مجموعهٔ نقطه‌هایی از صفحهٔ محورهای مختصات را پیدا کنید** که، مختصات آن‌ها، **در معادلهٔ زیر صدق کنند:**

$$||y + ۲| - ۳| = |۲ - |x - ۱||$$

۲. عبارت‌های گویا و عبارت‌های گنگ

با عددهای گویا و عددهای گنگ آشنا هستید (به عنوان نمونه، صفحه‌های ۱۰۵ و ۱۴۸ را در جلد اول «ریاضیات محاسبه‌ای» ببینید). ضمن مثال‌ها و تمرین‌ها، با عبارت‌های گویا و عبارت‌های گنگ کار کرده‌اید. با وجود این، در این‌جا، برخی ویژگی‌های عبارت‌های گویا را به یاد می‌آوریم و، سپس، به شیوهٔ عمل با عددهای و عبارت‌های گنگ می‌پردازیم.

§۱. برخی ویژگی‌های عبارت‌های گویا

ضمن ساده کردن عبارت‌ها یا برابری‌ها، اشتباه نکنید. وقتی می‌خواهید عبارتی را ساده کنید، یا درستی اتحادی را ثابت کنید و یا معادله‌ای را حل کنید، به قانون‌های عمل توجه داشته باشید و مراقب باشید عمل اشتباهی را انجام ندهید. برخی از اشتباه‌های احتمالی را به یاد می‌آوریم.

۱) *مواظب عدد صفر باشید.* به این چند مثال توجه کنید.

مثال ۱. *a و b را دو عدد مختلف فرض می‌کنیم. روشن است، برای هر دو عدد دلخواه a و b می‌توان نوشت:*

$$a^۲ - b^۲ = a^۲ - b^۲$$

این، یک برابری روشن است که می‌توان آن را این‌طور نوشت:

$$a^2 - a^2 = b^2 - b^2 \Rightarrow a(a-a) = b(b-b)$$

$a - a$ با $b - b$ برابر است، سمت چپ برابری را بر $a - a$ و سمت راست آن را بر $b - b$ تقسیم می‌کنیم، به برابری

$$a = b$$

می‌رسیم؛ یعنی هر دو عدد دلخواه a و b با هم برابرند.

این نتیجهٔ نادرست، از این عمل اشتباه به دست آمد که، دو طرف برابری را بر صفر ($a - a$ یا $b - b$) تقسیم کردیم:

تقسیم بر صفر مجاز نیست؛ تقسیم بر صفر معنا ندارد.

در تقسیم عدد a بر عدد b، یعنی در کسر $\frac{a}{b}$، هرچه b کوچکتر باشد، خارج قسمت بزرگتر می‌شود:

$$b = 1 \Rightarrow \frac{a}{b} = a; \quad b = 0/1 \Rightarrow \frac{a}{b} = 10a;$$

$$b = 0/01 \Rightarrow \frac{a}{b} = 100a; \quad b = 0/001 \Rightarrow \frac{a}{b} = 1000a$$

وقتی b به صفر نزدیک شود، خارج قسمت بسیار بزرگ می‌شود. در ریاضیات می‌گویند: *اگر b به سمت صفر میل کند، مقدار $\frac{a}{b}$ به سمت بی‌نهایت* می‌رود. برای بی‌نهایت، علامتی هم وجود دارد: ∞. ولی بی‌نهایت، یک عدد نیست که بتوان، مثل عددهای معمولی با آن عمل کرد. بی‌نهایت، یک مفهوم است؛ بی‌نهایت، یعنی بزرگتر از هر عددی که می‌توانید تصور کنید. اگر x را بی‌نهایت فرض کنید، $2x$ یا x^2 یا x^{100} یا حتا x^x را هم بی‌نهایت می‌نامید. ولی، منطق حکم می‌کند که x و $2x$ و x^2 و غیره را برابر به حساب

نیاوریم. *دنیای بی‌نهایت‌ها، قانون‌هایی ویژهٔ خود دارد که با قانون‌های دنیای عددهای معمولی فرق می‌کند*؛ بدون آشنایی با این قانون‌ها، نباید عملی انجام داد. دوباره تکرار می‌کنیم: نتیجهٔ تقسیم بر صفر، یک عدد نیست و، بنابراین، تقسیم بر صفر مجاز نیست.

مثال ۲. می‌خواهیم کسر $\frac{x^{۲}+x}{x}$ را ساده کنیم:

$$\frac{x^{۲}+x}{x}=\frac{x(x+۱)}{x}=x+۱$$

حل. آیا این نتیجه، همیشه درست است؟ در آخرین عمل چه کردیم؟ صورت و مخرج کسر را بر x تقسیم کردیم. آیا این تقسیم، همیشه مجاز است؟ اگر x برابر صفر باشد، چی؟

جواب درست این است: حاصل کسر برابر $x+۱$ است، به شرطی که x مخالف صفر باشد؛ در حالت $x=۰$، کسر بی‌معنا می‌شود:

$$\frac{x^{۲}+x}{x}=\begin{cases} x+۱ & (x\neq ۰) \\ \text{بی‌معنی} & (x=۰)\end{cases}$$

مثال ۳. این معادله را حل کنید:

$$\frac{۱۰}{x-۳}-\frac{۵(x-۱)}{x-۳}=۲$$

حل. معادلهٔ ساده‌ای است. عدد ۲ را به سمت چپ برابری می‌بریم و در سمت چپ، مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{۱۰-۵(x-۱)-۲(x-۳)}{x-۳}=۰$$

کسری برابر صفر است که صورت آن برابر صفر باشد:

$$۱۰-۵(x-۱)-۲(x-۳)=۰\Rightarrow ۲۱-۷x=۰$$

که از آن به دست می‌آید: $x = ۳$. آیا حل معادله تمام شد؟ آیا $x = ۳$ ریشهٔ معادله است؟ آیا $x = ۳$ در معادلهٔ اصلی صدق می‌کند؟ به محض این‌که، به سراغ معادلهٔ اصلی برویم، به اشکال برمی‌خوریم. کسرهای سمت چپ برابری، در معادلهٔاصلی، مخرج $x - ۳$ دارند و می‌دانیم، تقسیم بر صفر مجاز نیست.

$x = ۳$ ریشهٔ معادلهٔ ما نیست، زیرا مخرج‌ها را صفر می‌کند. این معادله، ریشه ندارد. می‌توان گفت، مجموعهٔ جواب در این معادله، یک مجموعهٔ تهی است.

مثال ۴. *این معادله را حل کنید:*

$$\frac{x - ۱}{a} + \frac{a + ۱}{x} = ۲$$

حل. از آغاز باید شرط کنیم: $a \neq ۰$ و $x \neq ۰$. به ترتیب داریم:

$$\frac{x^۲ - x + a^۲ + a}{ax} = ۲; \quad x^۲ - (۲a + ۱)x + a^۲ + a = ۰$$

این معادلهٔ درجه دوم، دو جواب دارد:

$$x_۱ = a, x_۲ = a + ۱$$

$x_۱ = a$، به شرطی ریشهٔ معادله است که a برابر صفر نباشد. ولی دربارهٔ $x_۲ = a + ۱$ چه بگوییم؟ شرط کرده بودیم $x \neq ۰$؛ آیا این شرط به معنای آن است که، به ازای $a = -۱$ (که به‌ازای آن $a + ۱$، یعنی x، برابر صفر می‌شود). معادلهٔ مفروض ریشه‌ای ندارد. آزمایش می‌کنیم (برای $a = ۰$، آزمایشی لازم نیست، زیرا به روشنی، مخرج کسر $\frac{x - ۱}{a}$ برابر صفر می‌شود)؛ اگر در معادلهٔ اصلی، با شرط $x \neq ۰$، $a = -۱$ بگیریم،

به این معادله می‌رسیم:

$$\frac{x-1}{-1}+0=2 \Rightarrow x=-1$$

نتیجه حل معادله را، می‌توان به این صورت نوشت:

ـ اگر $a=0$، آن وقت معادله بی‌معنا می‌شود و، درنتیجه، ریشه‌ای ندارد؛

ـ اگر $a=-1$، معادله یک ریشه دارد: $x=-1$؛

ـ اگر $a \neq 0$ و $a \neq -1$، آن وقت معادله دارای دو ریشه است: $x_1=a$ و $x_2=a+1$.

توجه کنید: اگر بدون توجه به این نکته‌ها، به این نتیجه برسید که معادله دارای دو ریشهٔ a و $a+1$ است، در واقع، تنها بخشی از مساله را حل کرده‌اید، نه تمام آن را. صحبت دربارهٔ حالت‌های خاص و تعیین تکلیف این حالت‌ها، جزو حل مساله است.

یادداشت. ضمن همین مثال‌ها، بی شک متوجه این نکته شده‌اید که، دو طرف برابری را، در صفر نمی‌توان ضرب کرد، همان‌طور که صورت و مخرج یک‌کسر را هم نمی‌توان در صفر ضرب کرد.

مثال ۵. *ثابت کنید، مقدار کسر مرکب*

$$\frac{\frac{m+n}{m-n}+\frac{m-n}{m+n}}{\frac{m+n}{m-n}-\frac{m-n}{m+n}}$$

به ازای، همهٔ مقدارهای هم‌علامت و قابل قبول m و n، مقداری بزرگتر از واحد دارد.

حل. در همان آغاز، باید شرط کنیم:

$$\begin{cases} m+n \neq 0 \\ m-n \neq 0 \end{cases} \Rightarrow m \neq \pm n \Rightarrow |m| \neq |n|$$

خود صورت مساله، نشان می‌دهد که، مقدارهای با قدرمطلق برابر برای m و n، جزو مقدارهای قابل قبول نیست. اگر با این شرط، کسر مرکب را ساده کنیم، به کسر $\frac{m^{۲}+n^{۲}}{۲mn}$ می‌رسیم که، شرط دیگری را به ما تلقین می‌کند: m یا n نمی‌تواند برابر صفر باشد.

به این ترتیب، با شرط‌های $|m| \neq |n|$ و $m \neq ۰$ و $n \neq ۰$، باید ثابت کنیم:

$$\frac{m^{۲}+n^{۲}}{۲mn} > ۱$$

و این روشن است، زیرا با توجه به هم علامت بودن m و n، می‌توان دو طرف نابرابری را در $۲mn$ ضرب کرد $(mn > ۰)$ که، در نتیجه، به نابرابری روشن زیر، که یک نابرابری اتحادی است، می‌رسیم:

$$(m-n)^{۲} > ۰$$

۲) *مواظب مجذور کردن باشید.* وقتی عددی یا عبارتی را مجذور کنیم، نه‌تنها قدر مطلق آن تغییر می‌کند، بلکه در ضمن، اگر منفی باشد، به مقداری مثبت تبدیل می‌شود، پس

۱) می‌توان صورت و مخرج کسری را در عددی غیر صفر ضرب کرد، ولی نمی‌توان کسری را مجذور کرد. مجذور کسر با خود کسر فرق دارد. وقتی $\frac{a}{b}$ را مجذور کنیم، مثل این است که صورت را در a و مخرج را در b ضرب کنیم و، اگر صورت و مخرج کسری را در دو عدد مختلف ضرب کنیم، کسری به دست می‌آید که مقدار آن با مقدار کسر قبلی فرق دارد.

۲) *در مجذور کردن دو طرف برابری و یا نابرابری احتیاط کنید.* اگر $a = b$، آن‌گاه $a^{۲} = b^{۲}$، ولی اگر $a^{۲} = b^{۲}$ آن‌گاه یا $a = b$ یا $a = -b$. بنابراین، اگر دو طرف برابری را مجذور کردید، به‌جز برابری اصلی، برابری دیگری را هم با آن همراه کرده‌اید.

در نابرابری، جز در موردهای خاص، نمی‌توان دو طرف را مجذور کرد. در نابرابری $a < b$، به شرط مثبت بودن a و b، با مجذور کردن دو طرف به نابرابری درست $a^۲ < b^۲$ می‌رسیم. اگر a و b هر دو منفی باشند، با مجذور کردن دو طرف، جهت نابرابری عوض می‌شود و از نابرابری $a < b$ به نابرابری $a^۲ > b^۲$ می‌رسیم. مثلاً می‌دانیم $-۱ > -۵$، ولی اگر دو طرف را مجذور کنیم، به نابرابری $۱ < ۲۵$ می‌رسیم.

در حالتی که از دو عدد a و b، یکی مثبت و دیگری منفی باشد، مجذور کردن دو طرف نابرابری، مجاز نیست (مگر این‌که بدانیم a قدر مطلق کوچکتری دارد یا b). فرض کنید $۶ > -۵$؛ در این‌جا اگر دو طرف را مجذور کنیم، جهت نابرابری تغییر نمی‌کند، ولی اگر دو طرف نابرابری $۷ > -۸$ را مجذور کنیم، جهت نابرابری تغییر می‌کند، زیرا $۴۹ < ۶۴$.

۲§. عمل با عددهای رادیکالی

۱. در جلد اول «ریاضیات محاسبه‌ای» (صفحهٔ ۱۴۸) عددهای گنگ را شناختیم و دیدیم، برخی از عددهای گنگ، با رادیکال‌ها نشان داده می‌شوند. عددهای

$$\sqrt{۲}, \sqrt[۳]{۴}, \sqrt[۴]{۵}, \sqrt{|a|}$$

عددهایی گنگ‌اند. درضمن، در یادداشت شمارهٔ ۳ صفحهٔ ۱۵۳ همان جلد اول «ریاضیات محاسبه‌ای» دیدیم، عددهای گنگ هم به دو گروه تقسیم می‌شوند: عددهای جبری و عددهای غیر جبری.

اگر a عددی گویا باشد، $\sqrt[۳]{a}$، $\sqrt[۵]{a}$، ... و به طور کلی $\sqrt[۲n+۱]{a}$ $(n \in \mathbb{N})$ عددهایی جبری‌اند؛ همچنین برای عدد گویای $a > ۰$، عددهای $\sqrt{a}$، $\sqrt[۴]{a}$ و، به طور کلی $\sqrt[۲n]{a}$ $(n \in \mathbb{N})$ عددهایی جبری‌اند، زیرا این

عددها، می‌توانند ریشه‌ای از یک معادله با ضریب‌های درست باشند:

$$x^۳ = ۵ \Rightarrow x = \sqrt[۳]{۵};\ ۲x^۲ = ۳ \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{۳}{۲}}$$

ولی عددهایی مثل π و $\sqrt{\pi}$، عددهای گنگ غیر جبری‌اند: نمی‌توان معادله‌ای با ضریب‌های درست پیدا کرد که یکی از ریشه‌های آن π یا $\sqrt{\pi}$ باشد.

درضمن، در صفحهٔ ۱۵۵ جلد اول «ریاضیات محاسبه‌ای»، به نکته‌ای مهم و اساسی اشاره کردیم و گفتیم: جذر $a^۲$ با $\sqrt{a^۲}$ فرق دارد؛ جذر $a^۲$ برابر است با $\pm a$ و $\sqrt{a^۲}$ برابر است با $|a|$.

یادداشت. به سادگی متوجه می‌شوید که، چرا در ریاضیات مقدماتی، حاصل رادیکال را، وقتی فرجه‌ای برابر ۲ (یا به طور کلی زوج) داشته باشد) برابر مقداری مثبت می‌گیرند. فرض کنید، بخواهیم حاصل عبارت

$$\sqrt{۹} - \sqrt{۲۵}$$

را پیدا کنیم. اگر قرار بود، حاصل $\sqrt{۹}$ را برابر ±۳ و $\sqrt{۲۵}$ را برابر ±۵ بگیریم، حاصل این عبارت می‌توانست ۴ مقدار مختلف باشد و، وجود علامت در جلو رادیکال هم، بی‌معنی می‌شد؛ یعنی اگر عبارت را به یکی از صورت‌های

$$\sqrt{۹} + \sqrt{۲۵} \text{ یا } -\sqrt{۹} + \sqrt{۲۵} \text{ یا } -\sqrt{۹} - \sqrt{۲۵}$$

می‌نوشتیم، باز هم، همان جواب‌ها به دست می‌آمد. ولی اگر $\sqrt{۹}$ را بر ۳ (و نه ±۳) و $\sqrt{۲۵}$ را برابر ۵ (و نه ±۵) بگیریم، این چهار عبارت با هم تفاوت پیدا می‌کنند و، هرکدام، جواب یگانه‌ای دارند:

$$\sqrt{۹} - \sqrt{۲۵} = ۳ - ۵ = -۲;\ \sqrt{۹} + \sqrt{۲۵} = ۸;$$
$$-\sqrt{۹} + \sqrt{۲۵} = ۲;\ -\sqrt{۹} - \sqrt{۲۵} = -۸$$

به این ترتیب به یاد داشته باشیم:

$$\sqrt{a^{۲}} = |a| = \begin{cases} a & (a \geq ۰) \\ -a & (a < ۰) \end{cases}$$

اکنون تکلیف ما، برای نوشتن نتیجهٔ

$$\sqrt{(۳a+۷)^{۲}}$$

روشن است. اگر داشته باشیم $a \geq -\frac{۷}{۳}$، آن وقت $۳a + ۷$ مقداری غیر منفی می‌شود، یعنی

$$a \geq -\frac{۷}{۳} \Rightarrow \sqrt{(۳a+۷)^{۲}} = ۳a + ۷$$

$$a < -\frac{۷}{۳} \Rightarrow \sqrt{(۳a+۷)^{۲}} = -(۳a + ۷)$$

۲. نماد $\sqrt{\ }$ را، برای ریشهٔ دوم، نخستین بار، کریستف رودُلف، ریاضی‌دان آلمانی سدهٔ شانزدهم میلادی در سال ۱۵۲۵، در کتاب خود به کار برد. سپس آلبر ژیرار (۱۵۹۵_۱۶۳۲ میلادی)، ریاضی‌دان هلندی، در نوشته‌ای از خود که در سال ۱۶۲۹ میلادی منتشر شد، این نماد را برای ریشهٔ سوم، ریشهٔ چهارم و غیره، به همان صورت امروزی، یعنی $\sqrt[۳]{\ }$، $\sqrt[۴]{\ }$ و غیره معمول کرد.

توجه کنید: $\sqrt{۵}$ را می‌توان به صورت «رادیکال پنج» یا «ریشهٔ دوم پنج» بیان کرد؛ ولی برای خواندن $\sqrt[۳]{۵}$ یا $\sqrt[۴]{۵}$، از واژهٔ «رادیکال» استفاده نکنید و بخوانید: «ریشهٔ سوم پنج» یا «ریشهٔ چهارم پنج».

رادیکال را «ریشگی» هم می‌گویند.

۳. **جمع جبری رادیکال‌ها**. به این دو عدد توجه کنید:

$$\sqrt{۱۶} + \sqrt{۹} = ۴ + ۳ = ۷.$$

$$\sqrt{۱۶ + ۹} = \sqrt{۲۵} = ۵$$

همین مثال ساده، روشن می‌کند:

۱) برای جمع جبری دو یا چند ریشگی (حتا اگر رادیکال‌ها، فُرجهٔ برابر داشته باشند) نمی‌توان مقدارهای زیر رادیکال‌ها را با هم جمع جبری کرد.

۲) اگر در زیر رادیکال، جمع جبری چند مقدار، وجود داشته باشد، نمی‌توان آن را به صورت جمع جبری چند رادیکال نوشت:

$$\sqrt{a} \pm \sqrt{b} \neq \sqrt{a \pm b},$$
$$\sqrt{x^۲ + y^۲} \neq |x| + |y|$$

در جمع جبری ریشگی‌ها، باید مقدار تقریبی هر ریشگی را محاسبه و، سپس، جمع جبری آن‌ها را به دست آورد.

مثال ۶. *این مجموع را محاسبه کنید:*

$$\sqrt{۷} - \sqrt{۵} + \sqrt[۳]{۲}$$

حل. *داریم:*

$$\sqrt{۷} \simeq ۲/۶۴۶;\ \sqrt{۵} \simeq ۲/۲۳۶;\ \sqrt[۳]{۲} \simeq ۱/۲۶۰$$

بنابراین:

$$\sqrt{۷} - \sqrt{۵} + \sqrt[۳]{۲} \simeq ۲/۶۴۶ - ۲/۲۳۶ + ۱/۲۶۰ = ۱/۶۷۰$$

یادداشت. مقدارهای تقریبی ریشگی‌ها را می‌توان با استفاده از جدول‌ها و یا، بهتر از آن، ماشین حساب به دست آورد. با وجود این، روشی را که ارشمیدس (ریاضی‌دان بزرگ یونانی در سدهٔ سوم پیش از میلاد)، برای محاسبهٔ جذر تقریبی عددهای به کار می‌برد، در این‌جا می‌آوریم. این روش، به ویژه، برای عددهایی که خیلی بزرگ نباشند، کارساز است.

اگر $a_۱$ را جذر تقریبی نقصانی عدد A فرض کنیم، عدد $a_۲$ که جذر تقریبی نقصانی بهتری برای A است، از برابری

$$a_۲ = \frac{۱}{۲}\left(a_۱ + \frac{A}{a_۱}\right) \qquad (*)$$

به دست می‌آید. برابری $(*)$، همان برابری ارشمیدس، برای محاسبه مقدار تقریبی جذر است.

مثال ۷. *جذر تقریبی عدد ۱۰ را، با روش ارشمیدس پیدا کنید.*

حل. جذر تقریبی نقصانی عدد ۱۰، برابر است با ۳. بنابراین، داریم:

$$A = ۱۰, a_۱ = ۳$$

که اگر در برابری $(*)$ قرار دهیم، به دست می‌آید:

$$a_۲ = \frac{۱}{۲}\left(a_۱ + \frac{A}{a_۱}\right) = \frac{۱}{۲}\left(۳ + \frac{۱۰}{۳}\right) =$$
$$= \frac{۱۹}{۶} \simeq ۳/۱۶۲$$

اگر دوباره، همان عملی را که با $a_۱$ انجام دادیم، با $a_۲$ انجام دهیم، تقریب بهتری برای $\sqrt{۱۰}$ به دست می‌آید:

$$a_۳ = \frac{۱}{۲}\left(a_۲ + \frac{A}{a_۲}\right) = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱۹}{۶} + \frac{۱۰}{\frac{۱۹}{۶}}\right) =$$
$$= \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱۹}{۶} + \frac{۶۰}{۱۹}\right) = \frac{۱}{۲} \times \frac{۷۲۱}{۱۱۴} = \frac{۷۲۱}{۲۲۸} \simeq$$
$$\simeq ۳/۱۶۲۲۸۰$$

جذر تقریبی عدد ۱۰، اگر مثلاً با ماشین حساب پیدا کنیم، برابر است با

$$\sqrt{۱۰} \simeq ۳/۱۶۲۲۷۷$$

به این ترتیب می‌بینیم، در تقریب اول، مقدار $\sqrt{۱۰}$ با روش ارشمیدس، تا سه رقم بعد از ممیز و در تقریب دوم، تا چهار رقم بعد از ممیز به دست آمده است.

روشن است که، هرچه جذر تقریبی اولیه، به عدد ما نزدیک‌تر باشد، زودتر و در یک یا دو عملِ نخستین، به تقریب خوبی برای جذر می‌رسیم.

□

اگر به مقدار تقریبی یک عبارتِ عددیِ رادیکالی، نیاز نداشته باشیم، برای ساده کردن آن، تنها می‌توان جمله‌های متشابه را با هم جمع و یا از هم کم کرد:

$$\sqrt{۳} - ۳\sqrt{۵} + ۴\sqrt{۵} + ۷\sqrt{۳} - \sqrt{۷} =$$
$$= (۱ + ۷)\sqrt{۳} + (-۳ + ۴)\sqrt{۵} - \sqrt{۷} = ۸\sqrt{۳} + \sqrt{۵} - \sqrt{۷};$$
$$a\sqrt{b} + b\sqrt{a} - ۲\sqrt{b} + \sqrt{a} = (a - ۲)\sqrt{b} + (b + ۱)\sqrt{a}$$

۴. ضرب و تقسیم رادیکال‌ها. برای ضرب دو رادیکال در یکدیگر، یا برای تقسیم دو رادیکال بر یکدیگر، به شرطی که فُرجه‌های برابر داشته باشند، می‌توان مقدارهای زیر رادیکال‌ها را در هم ضرب یا بر هم تقسیم کرد:

$$\sqrt{۸} \times \sqrt{۲} = \sqrt{۸ \times ۲} = \sqrt{۱۶} = ۴;$$
$$\sqrt[۳]{۶} \times \sqrt[۳]{۴} \times \sqrt[۳]{۹} = \sqrt[۳]{۶ \times ۴ \times ۹} =$$
$$= \sqrt[۳]{۲۱۶} = \sqrt[۳]{۶^۳} = ۶$$

عکس این عمل‌ها هم می‌تواند درست باشد:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}; \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

ولی این برابری‌ها وقتی درست است که a و b مثبت باشند. توجه کنید، اگر a و b هر دو منفی باشند، $\sqrt{ab}$ معنا دارد (چون ab مقداری مثبت است)، ولی $\sqrt{a}$ و $\sqrt{b}$ موهومی می‌شوند؛ بنابراین، با فرض $ab \geq ۰$، بهتر است، دو برابری بالا را این طور بنویسیم:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{|a|} \cdot \sqrt{|b|}; \ \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{|a|}}{\sqrt{|b|}}$$

مثال ۸. *این عبارت را ساده کنید:*

$$A = \sqrt{۸} + \sqrt[۳]{۵۴} - \sqrt{۵۰} + \frac{۱}{۳}\sqrt[۳]{۴۳۲}$$

حل. داریم:

$$\sqrt{۸} = \sqrt{۴ \times ۲} = \sqrt{۴} \times \sqrt{۲} = ۲\sqrt{۲};$$
$$\sqrt[۳]{۵۴} = \sqrt[۳]{۲۷ \times ۲} = \sqrt[۳]{۲۷} \times \sqrt[۳]{۲} = ۳\sqrt[۳]{۲};$$
$$\sqrt{۵۰} = \sqrt{۲۵ \times ۲} = ۵\sqrt{۲};$$
$$\sqrt[۳]{۴۳۲} = \sqrt[۳]{۲۷ \times ۸ \times ۲} = ۳ \times ۲\sqrt[۳]{۲} = ۶\sqrt[۳]{۲}$$

بنابراین

$$A = ۲\sqrt{۲} + ۳\sqrt[۳]{۲} - ۵\sqrt{۲} + ۲\sqrt[۳]{۲} = -۳\sqrt{۲} + ۵\sqrt[۳]{۲}$$

۵. توان یک رادیکال. اگر رادیکالی به توان فُرجه خود برسد، مقدار زیر رادیکال به دست می‌آید:

$$(\sqrt{۳})^{۲} = ۳; \ (\sqrt[۳]{-۲})^{۳} = -۲; \ (\sqrt[n]{a})^{n} = a$$

اگر فرجهٔ رادیکال عددی فرد باشد، برای این‌که رادیکال را به توان برسانیم، می‌توانیم مقدار زیر رادیکال را به توان برسانیم:

$$(\sqrt[۳]{a})^{۲} = \sqrt[۳]{a^{۲}};\ (\sqrt[۵]{۲})^{۳} = \sqrt[۵]{۲^{۳}} = \sqrt[۵]{۸}$$

این عمل برای فرجه‌های زوج، وقتی درست است که زیر رادیکال، عددی منفی نباشد:

$$(\sqrt[۴]{۸})^{۲} = \sqrt[۴]{۸^{۲}} = \sqrt[۴]{۶۴} = \sqrt[۴]{۱۶ \times ۴} =$$
$$= ۲\sqrt[۴]{۴} = ۲\sqrt[۴]{۲^{۲}} = ۲\sqrt{۲}$$

در آخرین عمل، به‌جای $\sqrt[۴]{۲^{۲}}$ نوشتیم $\sqrt{۲}$. در واقع، اگر فرض کنیم:

$$a = \sqrt[۴]{۲^{۲}}$$

اگر دو طرف برابری را به توان ۴ برسانیم، به دست می‌آید:

$$a^{۴} = ۲^{۲}$$

و اگر از دو طرف ریشهٔ دوم بگیریم، نتیجه می‌شود:

$$a^{۲} = ۲ \Rightarrow a = \sqrt{۲}$$

و این، یک قانون کلی است: در رادیکال به صورت

$$\sqrt[n]{a^{m}}\ (a \geq ۰)$$

اگر m و n، بخشیاب مشترکی بزرگتر از واحد داشته باشند، می‌توان m و n را به بخشیاب مشترک آن‌ها تقسیم کرد؛

$$\sqrt[۴]{۳^{۲}} = \sqrt{۳};\ \sqrt[۶]{۵^{۳}} = \sqrt{۵};\ \sqrt[۱۵]{۸} = \sqrt[۱۵]{۲^{۳}} = \sqrt[۵]{۲};$$

از این قاعده می‌توان، برای ضرب یا تقسیم دو رادیکال، وقتی فرجه‌هایی نابرابر دارند، استفاده کرد. قاعده را دقیق‌تر بیان می‌کنیم:

اگر زیر رادیکال، عددی مثبت باشد، می‌توان فرجه و نمای زیر رادیکال را در عددی ضرب یا بر عددی تقسیم کرد:

$$\sqrt[۳]{۲} = \sqrt[۳\times۲]{۲^{۱\times۲}} = \sqrt[۶]{۲^۲} = \sqrt[۶]{۴};$$
$$\sqrt[۹]{a^۶} = \sqrt[۳]{a^۲};\ \sqrt[۴]{a^۲b^۲} = \sqrt{ab}\,(ab \geq ۰);$$

مثال ۹. به شرط $a > ۰$، *این حاصل ضرب را محاسبه کنید:*

$$A = \sqrt{a} \times \sqrt[۳]{a^۲} \times \sqrt[۴]{a^۳} \times \sqrt[۱۲]{a}$$

حل. کوچکترین مضرب مشترک بین فرجه‌ها (یعنی بین عددهای ۲، ۳، ۴ و ۱۲)، عدد ۱۲ است. ترتیبی می‌دهیم که همهٔ فرجه‌ها برابر ۱۲ باشند،

$$\sqrt{a} = \sqrt[۱۲]{a^۶};\ \sqrt[۳]{a^۲} = \sqrt[۱۲]{a^{۲\times۴}} = \sqrt[۱۲]{a^۸};$$
$$\sqrt[۴]{a^۳} = \sqrt[۱۲]{a^{۳\times۳}} = \sqrt[۱۲]{a^۹};$$
$$A = \sqrt[۱۲]{a^۶}\cdot \sqrt[۱۲]{a^۸}\cdot \sqrt[۱۲]{a^۹}\cdot \sqrt[۱۲]{a} = \sqrt[۱۲]{a^{۲۴}} = a^۲$$

گاهی لازم می‌شود، عددی را که به صورت ضرب در جلو رادیکال است، به زیر رادیکال ببریم. برای این منظور، *علامت جلو رادیکال را نگه دارید، قدر مطلق ضریب رادیکال را به توان فرجهٔ رادیکال برسانید و حاصل آن را در مقدار زیر رادیکال ضرب کنید.* به این چند نمونه توجه کنید:

$$۱)\ \frac{۱}{۲}\sqrt{۸} = \sqrt{\left(\frac{۱}{۲}\right)^۲ \times ۸} = \sqrt{\frac{۸}{۴}} = \sqrt{۲};$$
$$۲)\ -۵\sqrt{\frac{۱}{۵}} = -\sqrt{۵^۲ \times \frac{۱}{۵}} = -\sqrt{۵};$$

$$۳)\ -\frac{۱}{۲}\sqrt[۳]{۴۰} = -\sqrt[۳]{\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۳} \times ۴۰} = -\sqrt[۳]{\frac{۱}{۸} \times ۴۰} = -\sqrt[۳]{۵}$$

$$۴)\ a\sqrt{b} = \begin{cases} \sqrt{a^{۲}b} & (a \geq ۰) \\ -\sqrt{a^{۲}b} & (a < ۰) \end{cases}$$

۶. گویا کردن مخرج کسر. $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ عددی گنگ است و، جز به تقریب قابل تبدیل به عددی گویا نیست. ولی اگر صورت و مخرج کسر را در $\sqrt{۲}$ ضرب کنیم:

$$\frac{۱}{\sqrt{۲}} = \frac{۱ \times \sqrt{۲}}{\sqrt{۲} \times \sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۴}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۲}$$

به صورت ساده‌تر $\frac{۱}{۲}\sqrt{۲}$ درمی‌آید که عمل کردن با آن ساده‌تر است. بنابراین، اگر کسر مفروض پیچیده نشود، بهتر است آن را به صورتی درآوریم که مخرج گویا داشته باشد. در بیان عبارت اشتباه نکنید؛ **هرگز نگویید کسر را گویا می‌کنیم.**

گویا کردن مخرج کسر، در حالت‌های کلی، کار ساده‌ای نیست، ولی ما در این‌جا، با حالت‌های دشوار و پیچیده کاری نداریم و تنها به سه حالت سادهٔ آن می‌پردازیم:

حالت اول، وقتی مخرج کسر، تنها شامل یک رادیکال باشد. با فرض $a > ۰$، فرض کنید بخواهیم کسر $\frac{A}{\sqrt[n]{a}}$ را به کسری تبدیل کنیم که مخرجی گویا داشته باشد. برای این منظور کافی است، صورت و مخرج کسر را، در $\sqrt[n]{a^{n-۱}}$ ضرب کنیم:

$$\frac{A}{\sqrt[n]{a}} = \frac{A\sqrt[n]{a^{n-۱}}}{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a^{n-۱}}} = \frac{A\sqrt[n]{a^{n-۱}}}{\sqrt[n]{a^{n}}} = \frac{A\sqrt[n]{a^{n-۱}}}{a}$$

به این چند نمونه توجه کنید:

$$1)\ \frac{3}{\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{9}}=\frac{3\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3};$$

$$2)\ \frac{a}{\sqrt[3]{a^2}}=\frac{a\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[3]{a}}=\frac{a\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a^3}}=\frac{a\sqrt[3]{a}}{a}=\sqrt[3]{a};$$

$$3)\ \frac{1}{\sqrt[3]{50}}=\frac{1}{\sqrt[3]{5^2\times 2}}=\frac{1\times\sqrt[3]{5\times 2^2}}{\sqrt[3]{5^2\times 2}\times\sqrt[3]{5\times 2^2}}=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{20}}{\sqrt[3]{5^3\times 2^3}}=\frac{\sqrt[3]{20}}{10}=\frac{1}{10}\sqrt[3]{20};$$

$$4)\ \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{20}}}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{4\times\frac{5}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}\times 20}}}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{10}-\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{5}(\sqrt{2}-1)}=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

حالت دوم، وقتی در مخرج کسر، مجموع یا تفاضل دو ریشهٔ دوم باشد. در این حالت، برای گویا کردن مخرج کسر، باید صورت و مخرج کسر را، در مزدوج مخرج ضرب کرد. (برای تعریف دوجمله‌ای‌های مزدوج، صفحهٔ ۱۸۱ را در جلد اول «ریاضیات محاسبه‌ای» ببینید). به چند نمونه توجه کنید:

$$1)\quad \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{1\times(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2}=\sqrt{3}-\sqrt{2};$$

$$2)\quad \frac{15}{\sqrt{6}-1}=\frac{15(\sqrt{6}+1)}{(\sqrt{6}-1)(\sqrt{6}+1)}=\frac{15(\sqrt{6}+1)}{6-1}=$$

$$= \frac{۱۵(\sqrt{۶}+۱)}{۵} = \frac{\sqrt{۶}+۱}{۳};$$

$$۳)\quad \frac{۱۱}{۴\sqrt{۵}-۶} = \frac{۱۱}{۲(۲\sqrt{۵}-۳)} =$$

$$= \frac{۱۱(۲\sqrt{۵}+۳)}{۲(۲\sqrt{۵}-۳)(۲\sqrt{۵}+۳)} = \frac{۱۱(۲\sqrt{۵}+۳)}{۲[(۲\sqrt{۵})^۲-۳^۲]} =$$

$$= \frac{۱۱(۲\sqrt{۵}+۳)}{۲(۲۰-۹)} = \frac{۱۱(۲\sqrt{۵}+۳)}{۲\times ۱۱} = \frac{۲\sqrt{۵}+۳}{۲}$$

مثال ۱۰. *مخرج این کسر را گویا کنید:*

$$A = \frac{a}{\sqrt{۶}-\sqrt{۳}-\sqrt{۲}+۲}$$

حل. مخرج کسر را می‌توان تجزیه کرد. اگر ۲ را $\sqrt{۴}$ به حساب آوریم:

$$\sqrt{۶}-\sqrt{۳}-\sqrt{۲}+۲ = (\sqrt{۶}+\sqrt{۴})-(\sqrt{۳}+\sqrt{۲}) =$$
$$= \sqrt{۲}(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})-(\sqrt{۳}+\sqrt{۲}) = (\sqrt{۳}+\sqrt{۲})(\sqrt{۲}-۱)$$

در مخرج دو عامل وجود دارد: $\sqrt{۳}+\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۲}-۱$. بنابراین، صورت و مخرج کسر را در مزدوج‌های این دو عامل، یعنی در $\sqrt{۳}-\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۲}+۱$ ضرب می‌کنیم:

$$A = \frac{a}{(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})(\sqrt{۲}-۱)} =$$
$$= \frac{a(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})(\sqrt{۲}+۱)}{[(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})][(\sqrt{۲}-۱)(\sqrt{۲}+۱)]} =$$
$$= \frac{a(\sqrt{۶}+\sqrt{۳}-\sqrt{۲}-۲)}{(۳-۲)(۲-۱)} = a(\sqrt{۶}+\sqrt{۳}-\sqrt{۲}-۲)$$

حالت سوم. *وقتی در مخرج کسر، دو رادیکال با فرجهٔ ۳ (دو ریشهٔ سوم) وجود داشته باشد.* در این حالت، وقتی مخرج به صورت مجموع دو ریشهٔ سوم باشد، از اتحاد

$$(a+b)(a^{۲}-ab+b^{۲})=a^{۳}+b^{۳}$$

و وقتی مخرج به صورت تفاضل دو ریشه سوم باشد، از اتحاد

$$(a-b)(a^{۲}+ab+b^{۲})=a^{۳}-b^{۳}$$

استفاده می‌کنیم.

مثال ۱۱. *مخرج هریک از این دو کسر را گویا کنید:*

$$A=\frac{۳}{\sqrt[۳]{۵}-\sqrt[۳]{۲}}, B=\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲}+۱}$$

حل. مخرج کسر A، به صورت $a-b$ است که، در آن، $a=\sqrt[۳]{۵}$ و $b=\sqrt[۳]{۲}$. باید صورت و مخرج را در

$$a^{۲}+ab+b^{۲}=\sqrt[۳]{۲۵}+\sqrt[۳]{۱۰}+\sqrt[۳]{۴}$$

ضرب کرد:

$$A=\frac{۳(\sqrt[۳]{۲۵}+\sqrt[۳]{۱۰}+\sqrt[۳]{۴})}{(\sqrt[۳]{۵}-\sqrt[۳]{۲})(\sqrt[۳]{۲۵}+\sqrt[۳]{۱۰}+\sqrt[۳]{۴})}=$$

$$=\frac{۳(\sqrt[۳]{۲۵}+\sqrt[۳]{۱۰}+\sqrt[۳]{۴})}{(\sqrt[۳]{۵})^{۳}-(\sqrt[۳]{۲})^{۳}}=\sqrt[۳]{۲۵}+\sqrt[۳]{۱۰}+\sqrt[۳]{۴}$$

به همین ترتیب

$$B=\frac{\sqrt[۳]{۴}-\sqrt[۳]{۲}+۱}{(\sqrt[۳]{۲}+۱)(\sqrt[۳]{۴}-\sqrt[۳]{۲}+۱)}=\frac{\sqrt[۳]{۴}-\sqrt[۳]{۲}+۱}{(\sqrt[۳]{۲})^{۳}+۱^{۳}}=$$

$$=\frac{۱}{۳}(\sqrt[۳]{۴}-\sqrt[۳]{۲}+۱)$$

مثال ۱۲. مخرج کسر $\dfrac{A}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}$ را، با فرض مثبت بودن a و b، گویا کنید.

حل. وقتی مخرج کسر، دوجمله‌ای و فرجه‌ها، عددی زوج باشند، با ضرب صورت و مخرج در مزدوج مخرج، فرجه‌ها نصف می‌شوند. مقدار کسر را x می‌نامیم و صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم:

$$x=\frac{A(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})}{(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b})(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})}=\frac{A(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})}{(\sqrt[4]{a})^{2}-(\sqrt[4]{b})^{2}}=$$
$$=\frac{A(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$$

که، برای گویا شدن مخرج کسر، باید یکبار دیگر صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب کرد:

$$x=\frac{A(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}$$

که در نتیجه، مقدار کسر با مخرجی گویا به دست می‌آید:

$$x=\frac{A(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b}$$

۷. دو نکتهٔ مهم دربارهٔ رادیکال‌ها. ۱) اگر دو عدد درست مثبت a و b نسبت به هم اول و یکی از دو عدد $\sqrt{a}$ و $\sqrt{b}$، یا هردوی آن‌ها، گنگ باشند، آن‌وقت، عددهای

$$\sqrt{a}+\sqrt{b},\ \sqrt{a}-\sqrt{b},\ \sqrt{ab},\ \sqrt{\frac{a}{b}}$$

هم عددهایی گنگ‌اند. مثلاً عددهای

$$۲ - \sqrt{۳}, \sqrt{۵} + \sqrt{۲}, \sqrt{۱۰} = \sqrt{۵} \times \sqrt{۲}$$

عددهایی گنگ‌اند.

۲) اگر a، b، c و d عددهایی حقیقی باشند و c و d مجذور کامل نباشند و، درضمن، داشته باشیم:

$$a + \sqrt{c} = b + \sqrt{d}$$

آن وقت $a = b$ و $c = d$.

در واقع، اگر $a \neq b$ و $c \neq d$ فرض کنیم، باید به ترتیب داشته باشیم:

$$a - b = \sqrt{d} - \sqrt{c};$$

سمت چپ برابری، عددی گویا و سمت راست آن، عددی گنگ است و عدد گویا با عدد گنگ برابر نیست.بنابراین، $a = b$ و $c = d$.

این قاعده، برای رادیکال‌های با فرجهٔ بزرگتر از ۲ هم درست است.

۸. **معادله‌های گنگ.** معادله را گنگ گویند وقتی که، متغیر یا مجهول آن، به صورت گنگ داده شده باشد (یعنی نسبت به مجهول خود، گنگ باشد). معادلهٔ

$$\sqrt{۵}x^۲ - (\sqrt{۱۰} + ۱)x + \sqrt{۲} = ۰$$

معادله‌ای گنگ نیست، اگرچه ضریب‌هایی گنگ دارد. این معادله با همان دستوری که برای حل معادلهٔ درجه دوم یاد گرفته‌ایم، حل می‌شود. مبین این معادله، چنین است:

$$\Delta = (\sqrt{۱۰} + ۱)^۲ - ۴\sqrt{۱۰} = ۱۰ + ۱ - ۲\sqrt{۱۰} =$$
$$= (\sqrt{۱۰} - ۱)^۲$$

و بنابراین، ریشه‌های معادله، به دست می‌آیند:

$$x = \frac{(\sqrt{10}+1) \pm (\sqrt{10}-1)}{2\sqrt{5}} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x_1 = \sqrt{2} \\ x_2 = \frac{\sqrt{5}}{5} \end{array} \right.$$

ولی معادلهٔ به صورت

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x-2} = 1 \qquad (1)$$

معادله‌ای گنگ است، زیرا جمله‌های شامل x (مجهول معادله) در زیر رادیکال قرار دارند.

برای حل چنین معادله‌هایی، *باید معادله را گویا کنیم*، یعنی خود را به معادله‌ای برسانیم که، در آن، جمله‌های شامل مجهول، در زیر رادیکال نباشند.

اگر رادیکال‌ها، به صورت ریشهٔ دوم باشند، مثل معادلهٔ (۱)، برای گویا کردن معادله، ناچاریم یک یا چند بار، دو طرف معادله را به توان ۲ برسانیم. ولی عمل مجذور کردن، می‌تواند ریشهٔ اضافی وارد معادله کند. معادلهٔ سادهٔ

$$x = 2$$

را در نظر بگیرید، اگر دو طرف این معادله را مجذور کنیم، به معادلهٔ

$$x^2 = 4$$

می‌رسیم که دو ریشه دارد: $x = 2$ یا $x = -2$. در واقع، معادله $x^2 = 4$، هم‌ارز معادله $|x| = 2$ (یا $x = \pm 2$) است نه هم‌ارز $x = 2$.

بنابراین، اگر برای حل معادله‌ای ناچار شدیم، یک یا چند بار، به مجذور کردن دو طرف برابری متوسل شویم، برای کشف ریشه‌های واقعی معادله،

ناچاریم، جواب یا جواب‌های حاصل را در معادلهٔ نخستین، مورد آزمایش قرار دهیم. جوابی، ریشهٔ معادلهٔ ماست که در آن صدق کند.

برای ریشهٔ معادلهٔ گنگ باید به نکتهٔ دیگری هم توجه کنیم. ما در محدوده یا مجموعهٔ عددهای حقیقی کار می‌کنیم؛ بنابراین، به عنوان نمونه در معادلهٔ (۱)، باید رادیکال‌ها، عددهایی حقیقی باشند، یعنی داشته باشیم:

$$\begin{cases} x + ۱ \geq ۰ \\ x - ۲ \geq ۰ \end{cases} \Rightarrow x \geq ۲$$

عددهای کوچکتر از ۲، یکی یا هر دو رادیکال را به صورت عددهایی موهومی درمی‌آورند که، در ریاضیات مقدماتی، با آن‌ها کار نداریم.

$x \geq ۲$ را **دامنهٔ متغیر**، یعنی محدوده‌ای از عددها، که x می‌تواند آن‌ها را بپذیرد، می‌نامند.

کوتاه سخن؛ جوابی که با حل معادلهٔ گنگ به دست می‌آوریم، باید

۱) در محدودهٔ مقدارهای قابل قبول برای مجهول باشد.

۲) در معادلهٔ اصلی صدق کند.

اکنون به حل معادلهٔ (۱) می‌پردازیم:

با مجذور کردن دو طرف برابری، به دست می‌آید:

$$(x + ۱) - ۲\sqrt{x^۲ - x - ۲} + (x - ۲) = ۱$$

که بعد از ساده کردن و بردن رادیکال به سمت راست برابری، چنین می‌شود:

$$x - ۱ = \sqrt{x^۲ - x - ۲}$$

یک بار دیگر، دو طرف برابری را مجذور و سپس، ساده می‌کنیم:

$$x^۲ - ۲x + ۱ = x^۲ - x - ۲ \Rightarrow x = ۳$$

جواب حاصل، در دامنهٔ متغیر قرار دارد و، درضمن، در معادلهٔ (۱) صدق می‌کند. بنابراین، $x = ۳$ ریشهٔ معادلهٔ (۱) است.

مثال ۱۳. این معادله را حل کنید:

$$\sqrt{x-۲}+\sqrt{۲x-۳}-۲\sqrt{۳x-۴}=۰$$

حل. برای این‌که زیر رادیکال‌ها، عددهایی منفی نباشند (یعنی، برای این‌که با عددهای حقیقی سروکار داشته باشیم)، باید مقدار x از عدد ۲ کوچکتر نباشد. $x \geq ۲$، دامنهٔ متغیر، در مجموعهٔ عددهای حقیقی است.

برای گویا کردن معادله، رادیکال سوم را، به سمت راست برابری می‌بریم و، سپس، دو طرف را مجذور می‌کنیم. بعد از ساده کردن، به این معادله می‌رسیم:

$$۲\sqrt{۲x^۲-۷x+۶}=۹x-۱۱$$

دوباره دو طرف برابری را مجذور می‌کنیم؛ سرانجام، به این معادلهٔ درجه دوم می‌رسیم:

$$۷۳x^۲-۱۷۰x+۹۷=۰$$

یکی از ریشه‌های این معادله برابر واحد است ($x_۱ = ۱$)، زیرا عدد $x = ۱$ در معادله صدق می‌کند (مجموع جبری ضریب‌ها برابر صفر است). چون حاصل ضرب دو ریشه برابر $\frac{۹۷}{۷۳}$ است، بنابراین $x_۲ = \frac{۹۷}{۷۳}$.

هیچ‌کدام از دو عدد ۱ و $\frac{۹۷}{۷۳}$ در دامنهٔ متغیر نیستند (هر دو، از ۲ کوچکترند). بنابراین، *معادلهٔ ما*، در *مجموعهٔ عددهای حقیقی*، *جواب ندارد*. در واقع، جواب‌هایی که به دست آورده‌ایم (۱ و $\frac{۹۷}{۷۳}$)، عددهایی حقیقی‌اند، ولی، به‌ازای هریک از آن‌ها، مقدارهای زیر رادیکال‌ها منفی می‌شوند و، بنابراین، با عددهای موهومی سروکار پیدا می‌کنیم.

یادداشت. این جواب‌ها را آزمایش می‌کنیم. به‌ازای $x = ۱$، معادلهٔ مفروض، به صورت این برابری درمی‌آید:

$$\sqrt{-۱} + \sqrt{-۱} - ۲\sqrt{-۱} = ۰$$

این برابری، در مجموعهٔ عددهای موهومی، درست است. بنابراین، در واقع، $x = ۱$ در معادلهٔ مفروض صدق می‌کند؛ یعنی $x = ۱$ در مجموعهٔ عددهای موهومی، ریشه‌ای از معادله است.

برای $x = \frac{۹۷}{۷۳}$ داریم:

$$x - ۲ = \frac{۹۷}{۷۳} - ۲ = \frac{۹۷ - ۱۴۶}{۷۳} = -\frac{۴۹}{۷۳};$$

$$۲x - ۳ = \frac{۱۹۴}{۷۳} - ۳ = \frac{۱۹۴ - ۲۱۹}{۷۳} = -\frac{۲۵}{۷۳};$$

$$۳x - ۴ = \frac{۲۹۱}{۷۳} - ۴ = \frac{۲۹۱ - ۲۹۲}{۷۳} = -\frac{۱}{۷۳}$$

بنابراین، معادلهٔ ما، به‌ازای $x = \frac{۹۷}{۷۳}$، بعد از ساده کردن، به این صورت درمی‌آید:

$$۷\sqrt{-۱} + ۵\sqrt{-۱} - ۲\sqrt{-۱} = ۰$$

یعنی $x = \frac{۹۷}{۷۳}$، در مجموعهٔ عددهای موهومی هم، در معادله صدق نمی‌کند. در واقع $x = \frac{۹۷}{۷۳}$، ریشهٔ معادلهٔ زیر است:

$$\sqrt{x - ۲} - \sqrt{۲x - ۳} - ۳\sqrt{۳x - ۴} = ۰$$

ولی به یاد داشته باشیم که، برای ما، تنها جوابی قابل قبول است که هم با دامنهٔ متغیر سازگار باشد و هم در معادله صدق کند.

*مثال ۱۴. *این معادله را حل کنید:*

$$\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}=m$$

حل. چون مقدار رادیکال، نمی‌تواند منفی باشد، بنابراین $m \geq 0$. معادله به‌ازای مقدارهای منفی m جواب ندارد.

به‌ازای $m=0$، خواهیم داشت $x=-1$.

$m>0$ می‌گیریم و دو طرف معادله را مجذور می‌کنیم:

$$\frac{x+1}{x-1}=m^2 \Rightarrow x=\frac{m^2+1}{m^2-1}$$

آیا این جواب در معادله صدق می‌کند؟ داریم:

$$\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}=\sqrt{\frac{\frac{m^2+1}{m^2-1}+1}{\frac{m^2+1}{m^2-1}-1}}=\sqrt{m^2}=|m|=m$$

پاسخ. معادله، برای $m<0$، ریشه ندارد و، برای $m \geq 0$، یک ریشه دارد: $x=\frac{m^2+1}{m^2-1}$.

*۹. **رادیکال‌های مرکب.** عبارت‌هایی مثل

$$\sqrt{\sqrt[3]{4}}, \sqrt{5-2\sqrt{6}}$$

را، رادیکال مرکب نامیده‌اند.

برای تبدیل رادیکال‌های مرکب، به رادیکال‌های ساده، دو حالت را توضیح می‌دهیم.

حالت اول، وقتی که رادیکالی به صورت

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} \quad (a \geq ۰)$$

داشته باشیم. اگر مقدار این رادیکال مرکب را A فرض کنیم، باید به‌ترتیب داشته باشیم:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = A \Rightarrow \sqrt[m]{a} = A^n \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a = (A^n)^m = A^{nm} \Rightarrow \sqrt[nm]{a} = A$$

به این ترتیب

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$$

یعنی، اگر دو رادیکال، به طور مستقیم روی هم قرار گرفته باشند، باید فرجه‌های آن‌ها را در هم ضرب کرد و عدد حاصل را، فرجهٔ رادیکال حاصل قرار داد.

مثال ۱۵. *رادیکال* $\sqrt[۳]{a\sqrt{a}}$ *را، به شرط* $a > ۰$*، به رادیکال ساده تبدیل کنید.*

حل. با توجه به مثبت بودن a داریم

$$a\sqrt{a} = \sqrt{a^۲ \cdot a} = \sqrt{a^۳}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\sqrt[۳]{a\sqrt{a}} = \sqrt[۳]{\sqrt{a^۳}} = \sqrt{a}$$

حالت دوم. عبارت‌های به صورت $\sqrt{A + \sqrt{B}}$. فرض می‌کنیم:

$$\sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

با مجذور کردن دو طرف این برابری، به دست می‌آید:

$$A + \sqrt{B} = (a + b) + \sqrt{۴ab}$$

این برابری وقتی برقرار است که داشته باشیم:

$$a + b = A, ab = \frac{B}{۴}$$

بنابراین، a و b، ریشه‌های معادلهٔ درجه دومی هستند که مجموع ریشه‌های آن برابر A و حاصل‌ضرب ریشه‌های آن برابر $\frac{۱}{۴}B$ است:

$$t^۲ - At + \frac{۱}{۴}B = ۰$$

a و b، یعنی ریشه‌های این معادله، وقتی گویا هستند که، مبین این معادلهٔ درجه دوم، مجذور کامل باشد:

$$A^۲ - B = K^۲ \Rightarrow \sqrt{A^۲ - B} = K$$

در این صورت، مقدارهای a و b چنین‌اند:

$$a = \frac{A + K}{۲}, b = \frac{A - K}{۲}$$

و درنتیجه

$$\sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + K}{۲}} + \sqrt{\frac{A - K}{۲}} \qquad (۱)$$

به همین ترتیب، به دست می‌آید:

$$\sqrt{A - \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + K}{۲}} - \sqrt{\frac{A - K}{۲}} \qquad (۲)$$

نتیجه. برای این‌که بتوان رادیکال مرکب $\sqrt{A\pm\sqrt{B}}$ را به رادیکال‌های ساده تبدیل کرد، باید مقدار $A^۲ - B$ مجذور کامل باشد؛ در این صورت، دستورهای (۱) و (۲)، نتیجهٔ این تبدیل را به ما می‌دهند.

مثال ۱۶. *هریک از این رادیکال‌های مرکب را، به رادیکال‌های ساده تبدیل کنید:*

$$۱)\ \sqrt{۵+۲\sqrt{۶}};\quad ۲)\sqrt{a-\sqrt{a^۲-b^۲}}(a>b>۰)$$

حل. ۱) در این‌جا $A=۵$ و $B=(۲\sqrt{۶})^۲=۲۴$. یعنی

$$K=\sqrt{A^۲-B}=\sqrt{۲۵-۲۴}=۱$$

و بنابراین

$$\sqrt{۵+۲\sqrt{۶}}=\sqrt{\frac{۵+۱}{۲}}+\sqrt{\frac{۵-۱}{۲}}=\sqrt{۳}+\sqrt{۲}$$

۲) $K=\sqrt{a^۲-(a^۲-b^۲)}=b$، بنابراین

$$\sqrt{a-\sqrt{a^۲-b^۲}}=\sqrt{\frac{a+b}{۲}}-\sqrt{\frac{a-b}{۲}}$$

۱۰. جدول دستورها. آن‌چه را دربارهٔ عمل با رادیکال‌ها آوردیم، می‌توان در جدول زیر دید:

الف) برای عددهای طبیعی $m\geq ۲$ و $n\geq ۲$ و عددهای مثبت a و b

$$۱)\ \sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[n]{a}=\sqrt[mn]{a^{m+n}};$$

$$۲)\ \sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b};$$

$$۳)\ \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}};$$

$$۴)\ \sqrt[m]{a} : \sqrt[n]{a} = \sqrt[mn]{a^{n-m}};$$

$$۵)\ \sqrt[mn]{a^m} = \sqrt[n]{a};$$

$$۶)\ (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m};$$

$$۷)\ \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a};$$

$$۸)\ a\sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a^m b}$$

ب) برای $a < ۰$ و $b < ۰$:

$$۱)\ \sqrt{ab} = \sqrt{(-a)(-b)} = \sqrt{-a}\cdot\sqrt{-b};$$

$$۲)\ \sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\frac{-a}{-b}} = \frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}};$$

$$۳)\ \sqrt[۲mn]{a^{۲m}} = \sqrt[۲mn]{(-a)^{۲m}} = \sqrt[n]{-a};$$

$$۴)\ a\sqrt{-b} = -(-a)\sqrt{-b} = -\sqrt{-a^۲ b}$$

تمرین‌ها

۴۶. هریک از عددهای $\frac{۵}{۶}$ و $\frac{۷}{۸}$ را به مجموع کسرهایی تبدیل کنید که، صورت همهٔ آنها، برابر واحد باشد.

۴۷. حاصل هریک از این عبارت‌ها را پیدا کنید:

$$۱)\ \frac{a}{b+c} - \frac{d}{b^۲c+bc^۲};\qquad ۲)\ \frac{x^۲-y^۲}{۲y^۲}\times\frac{xy+y^۲}{x+y};$$

$$۳)\ \left(\frac{a-b}{a+b} - \frac{a^۳-b^۳}{a^۳+b^۳}\right)\left(\frac{a-b}{a+b} + \frac{a^۲+b^۲}{a^۲-b^۲}\right);$$

$$۴)\ \frac{\frac{\frac{m+۱}{n}}{m+p}}{np+۱} \times \frac{n}{mnp+m+pn+۱};$$

$$۵)\ \left(\frac{y+۱}{y^۲+۱-۲y}+\frac{۱}{y-۱}\right)\times\frac{y-۱}{y}-\frac{۲}{y-۱};$$

$$۶)\ \frac{x+۷}{x+۹}+\left(\frac{x+۷}{x^۲+۸۱-۱۸x}+\frac{x+۵}{x^۲-۸۱}\right)\left(\frac{x-۹}{x+۳}\right)^۲$$

۴۸. a، b و c را طوری پیدا کنید که، برای هر عدد حقیقی x، داشته باشیم:

$$۱)\ x^۳+۳x^۲-x-۳=(x-۲)(x^۲+bx+c)+a;$$

$$۲)\ ۴x^۳+۷x^۲+۷x-۶=(ax+b)(x^۲+x+۱)+c;$$

$$۳)\ \frac{۱}{x(x-۱)(x+۲)}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x-۱}+\frac{c}{x-۲};$$

$$۴)\ \frac{۱}{x^۳+۱}=\frac{ax+b}{x^۲-x+۱}+\frac{c}{x+۱};$$

$$۵)\ \frac{۱}{(x+۱)^۲(x+۲)}=\frac{a}{x+۱}+\frac{b}{(x+۱)^۲}+\frac{c}{x+۲}$$

$$۶)\ \frac{۲x^۲-x+۱}{(x+۱)(x-۲)^۲}=\frac{a}{x+۱}+\frac{b}{x-۲}+\frac{c}{(x-۲)^۲}$$

۴۹. این معادله‌ها را حل کنید:

$$۱)\ \frac{۱}{x-۱}-\frac{۲}{x+۲}=۱;$$

$$۲)\ \frac{۲x-۳}{x-۱}+۱=\frac{۶x-x^۲-۶}{x-۱};$$

$$۳)\ \frac{x}{x+۱}+\frac{x+۱}{x+۲}+\frac{x+۲}{x}=\frac{۲۵}{۶}$$

$$*۴)\ \frac{۱}{x^۲-۲x+۲}+\frac{۱}{x^۲-۲x+۳}=\frac{۲}{x^۲-۲x+۴};$$

$$*۵)\ \frac{۱}{x}+\frac{۱}{x+۱}+\frac{۱}{x+۲}+\frac{۱}{x+۳}+\frac{۱}{x+۴}=۰$$

$$*۶)\ \frac{۲x}{۳x^۲-x+۲}-\frac{۷x}{۳x^۲+۵x+۲}=-\frac{۱}{۵};$$

$$*۷)\ ۵\left(\frac{x-۲}{x+۱}\right)^۲-۴۴\left(\frac{x+۲}{x-۱}\right)^۲+\frac{۱۲(x^۲-۴)}{x^۲-۱}=۰$$

$$*۸)\ x^۲+\left(\frac{x}{x-۱}\right)^۲=۸;$$

$$*۹\ )(۱+۹x^۲)^۲=۱۲x(۱-۹x)$$

۵۰. هریک از این عبارت‌ها را، نسبت به مجهول‌های x یا x و y، به صورت یک چندجمله‌ای در نظر بگیرید. مجموع جبری ضریب‌های عددی هریک از این چندجمله‌ای‌ها چقدر است؟

$$۱)\ M=(۱۴x^۲+۱۳x-۲۵)^۳+(۵x^۲-۴x-۲)^{۱۵};$$

$$۲)\ N=(۲x+۳y-۴)^{۵۲}-(x+y)^۵+x^۲-۳y^۲$$

۵۱. هریک از این سه عبارت را، برحسب توان‌های نزولی $۲x+۱$ منظم کنید:

$$۱)\ A=۱۶x^۴-۲۴x^۳+۲۰x^۲-۲x+۷;$$

$$۲)\ B=x^۳+x-۱;\quad ۳)\ C=۸x^۳-۶x+۵$$

۵۲. دامنهٔ متغیرها را، در هریک از این عبارت‌ها پیدا کنید و، سپس، حاصل عبارت را بدست آورید:

۱) $\frac{(x+۱)(y+۱)}{xy+z+y+xz}$;

۲) $\frac{x^۲-x}{x-x^۳}:(x+۱)$;

۳) $\frac{x+۲}{x^۳+x^۲+x+۱}$;

۴) $\frac{(a+b)(c+d)}{ac-bd+ad-bc}$;

۵) $\frac{\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b+c}}{\frac{۱}{a}-\frac{۱}{b+c}}\left(۱+\frac{b^۲+c^۲-a^۲}{۲bc}\right)$;

۶) $\frac{\sqrt{(۲x+۱)^۲-۸x}}{۲\sqrt{x}-\frac{۱}{\sqrt{x}}}$؛

۷) $(x+\sqrt{y})(x-\sqrt{y})$;

۸) $\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\frac{x\sqrt{x}-\sqrt{y^۳}}{x-y}$;

۹) $\frac{\sqrt{x-\sqrt{۴(x-۱)}}+\sqrt{x+\sqrt{۴(x-۱)}}}{\sqrt{x^۲-۴(x-۱)}}\left(۱-\frac{۱}{x-۱}\right)$

۵۳. ساده کنید:

۱) $(\sqrt[۳]{a}-\sqrt[۳]{b})(\sqrt[۳]{a^۲}+\sqrt[۳]{ab}+\sqrt[۳]{b^۲})$;

۲) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-۶}-\frac{۳}{\sqrt{a}+۶}+\frac{a}{۳۶-a}$;

*۳) $\left(\frac{x}{x+۸}-\frac{۴x}{(\sqrt[۳]{x}+۲)^۳}\right)\left(\frac{۱+۲\sqrt[۳]{\frac{۱}{x}}}{۱-۲\sqrt[۳]{\frac{۱}{x}}}\right)^۲-\frac{۲۴}{x+۸}$;

۴) $\left(\frac{\sqrt{x}+۱}{\sqrt{x}-۱}-\frac{\sqrt{x}-۱}{\sqrt{x}+۱}+۴\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x}-\frac{۱}{\sqrt{x}}\right)$;

۵) $\frac{a-b}{a+b-۲\sqrt{ab}}\left(\frac{\sqrt{\frac{۱}{a}}-\sqrt{\frac{۱}{b}}}{\sqrt{\frac{۱}{a}}+\sqrt{\frac{۱}{b}}}\right)$

۵۴. کسرها را طوری تبدیل کنید که مخرجی گویا داشته باشند:

۱) $\frac{۱}{\sqrt{۸}}$; ۲) $\frac{۱۵}{\sqrt{۵۰}}$; ۳) $\frac{۶}{\sqrt[۳]{۲۴}}$;

۴) $\frac{۱}{۱+\sqrt{x}}$; ۵) $\frac{۱}{\sqrt[۳]{۳}-\sqrt[۳]{۲}}$; ۶) $\frac{۳}{\sqrt[۳]{۴۰}-\sqrt[۳]{۱۶}}$;

۷) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^۳}+\sqrt{xy}}$; ۸) $\frac{\sqrt{x}+\sqrt[۴]{xy}+\sqrt{y}}{\sqrt[۴]{x^۳}-\sqrt[۴]{y^۳}}$;

۹) $\sqrt[n]{\frac{y^۳}{y^{۲n-۳}}}$; ۱۰) $\sqrt[۲n]{a:b^{۲n-۱}}$;

۱۱) $\frac{x+۱}{x+\sqrt{x^۲-x-۱}}$; ۱۲) $\frac{۱}{\sqrt[۳]{۳}+\sqrt{۲}}$

۵۵. این معادله‌ها را حل کنید:

۱) $۲\sqrt{۶-x}-۳\sqrt{۲x-۱۳}=۱$; ۲) $\sqrt{-x-۱}=\sqrt[۳]{x-۵}$;

۳) $\sqrt{۴x+۹}=۲x-۳$; ۴) $\sqrt{۳x+۱}=x+۱$;

۵) $\sqrt[۳]{۱۵x+۱۲}+\sqrt{x-۱}=\sqrt{۱-x}+\sqrt[۳]{۴۱x+۴۰}$;

۶) $\sqrt{۳x^۲-۲x+۴}+\sqrt{۳x^۲-۲x-۵}=۹$;

۷) $\sqrt{۴+x}=۴-\sqrt{x}$; ۸) $\sqrt{۱-\sqrt{x^۴-x^۲}}=x-۱$;

۹) $\sqrt{x}-\sqrt{x-\sqrt{۱-x}}=۱$;

۱۰) $\sqrt[۳]{a+\sqrt{x}}+\sqrt[۳]{a-\sqrt{x}}=\sqrt[۳]{b}$;

$$*11)\ \sqrt[3]{(a+x)^2}-\sqrt[3]{a^2-x^2}+\sqrt[3]{(a-x)^2}=b;$$

$$*12)\ \frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{35}{12}$$

۵۶. به رادیکال‌های ساده تبدیل کنید:

$$1)\ \sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt[3]{a}}};\quad 2)\ \sqrt[3]{2\sqrt{2}}+3\sqrt[5]{4\sqrt{2}};$$

$$3)\ \sqrt[4]{\frac{a}{\sqrt[5]{a}}};\quad 4)\ \sqrt[4]{\frac{a}{\sqrt[3]{a}}};\quad 5)\ \sqrt[5]{\frac{a}{\sqrt[6]{a}}};$$

$$6)\ \sqrt{94+\sqrt{8820}};\quad 7)\ \sqrt{7-2\sqrt{6}};$$

$$8)\ \sqrt{25-6\sqrt{14}};\quad 9)\ \sqrt{a+\sqrt{b(2a-b)}};$$

*۵۷. a و b را طوری پیدا کنید که داشته باشیم:

$$\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}=a+b\sqrt{3}$$

۵۸. این معادله‌ها را حل کنید:

$$1)\ \frac{a}{1+2x}-\frac{a}{1-2x}=2b;\quad 2)\ \frac{x-2}{x+2}+\frac{3x^2}{8(x^2-4)}=1;$$

$$3)\ \frac{x}{2x-1}-\frac{2x}{3x-1}+\frac{3x-1}{4x-1}=\frac{7}{12};$$

$$*4)\ \frac{x^2+2x+2}{x+1}+\frac{x^2+8x+20}{x+4}=$$

$$=\frac{x^2+4x+6}{x+2}+\frac{x^2+6x+12}{x+3};$$

$$5)\ \frac{a^2+ax+x^2}{a^2-ax+x^2}=\frac{a^2}{x^2};$$

$*۶)\ \frac{x^۲}{۳} + \frac{۴۸}{x^۲} = ۱۰\left(\frac{x}{۳} - \frac{۴}{x}\right);$

$۷)\ \sqrt{۲x + ۱} - \sqrt{۵x - ۱۴} = ۰; \quad ۸)\sqrt{۴ + x} = ۴ - \sqrt{x};$

$۹)\ \sqrt[۳]{x^۲ - ۲x} - \sqrt[۳]{۲x^۲ - ۷x + ۶} = ۰;$

*۵۹. این دستگاه‌ها را حل کنید:

$$۱)\ \begin{cases} \sqrt{x + y} + \sqrt{۲x + y + ۲} = ۷ \\ ۳x + ۲y = ۲۳ \end{cases};$$

$$۲)\ \begin{cases} \sqrt{xy} - \sqrt{x} + \sqrt{y} = ۱ \\ x\sqrt{y} - y\sqrt{x} = ۲ \end{cases};$$

$$۳)\ \begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{۷}{\sqrt{xy}} + ۱ \\ \sqrt{x^۳ y} + \sqrt{y^۳ x} = ۷۸ \end{cases}$$

$$۴)\ \begin{cases} \sqrt{x^۲ + y^۲} + \sqrt{x^۲ - y^۲} = ۲y \\ x^۴ - y^۴ = a^۴ \end{cases}$$

۳. مفهوم تابع

§ ورود به مطلب[1]

حرکت و تغییر در ذات طبیعت است. بنابراین، برای شناخت قانون‌مندی‌های حاکم بر طبیعت و جامعه، نمی‌توان از این عامل اساسی و تعیین کننده (یعنی حرکت و تغییر) چشم پوشید. دانش، و ازجمله ریاضیات، قانون وضع نمی‌کند؛ کار دانش کشف قانون‌هایی است که در طبیعت و جامعه وجود دارد، نه اختراع آن‌ها. اگر بخواهید به قانون رشد یک گیاه و یا روند تکامل یک جامعه پی ببرید، نمی‌توانید در اتاق خود بنشینید و، تنها با مراجعه به «ذهن» و «خرد» خود به آن‌ها پی ببرید، باید موضوع مورد علاقهٔ خود را مورد مطالعه قرار دهید، از گذشته و حال و شرایط وجودی آن آگاه باشید و بسیاری از پیچیدگی‌ها و کمبودها را به محک آزمایش بزنید، جنبه‌های گوناگون موضوع را با هم مقایسه کنید و . . . تا بتوانید با بخشی از قانون‌های حاکم بر آن آشنا شوید.

هر پدیدهٔ طبیعی در حرکت است و تغییر می‌کند، ولی تغییر آن به تغییر پدیده‌های دیگر بستگی دارد و خود موجب تغییر در پدیده یا پدیده‌های دیگر

[1] پیش از آغاز این بخش، جلد دوم «ریاضیات محاسبه‌ای»، صفحه‌های ۳۹ و ۱۰۱ را ببینید.

می‌شود. وقتی درجهٔ حرارت هوا تغییر کند، بلندی ستون جیوه در گرماسنج هم تغییر می‌کند؛ هرچه بیشتر در آب فرو رویم، فشار بیشتری را از طرف آب بر بدن خود احساس می‌کنیم؛ اگر شیشهٔ بسته و پر از نوشابه را در «فریزر» یخچال بگذاریم، با یخ زدن مایع، حجم آن زیاد می‌شود و درنتیجه، فشار بیشتری به سطح درونی شیشه وارد می‌کند که می‌تواند موجب خُرد شدن آن بشود؛ با تغییر طول شعاع، سطح جانبی یا حجم کره تغییر می‌کند؛ جای یک سیاره، بستگی به زمان مشاهده و جای مشاهده کننده دارد و . . .

وقتی در ریاضیات، ویژگی حرکت و تغییر را و بستگی بین پدیده‌های متغیر را در نظر بگیریم و بررسی‌های خود را، نه دربارهٔ کمیت‌های ثابت و بی‌تغییر، بلکه دربارهٔ بستگی مقدارهای متغیر انجام دهیم، گویند با «**ریاضیات همراه با کمیت‌های متغیر**» سروکار داریم . در ریاضیاتِ با کمیت‌های متغیر، به‌جای عددها و مقدارهای ثابت، به بررسی بستگی و رابطهٔ بین مقدارهای متغیر می‌پردازیم.

ساده‌ترین مفهوم در ریاضیات با کمیت‌های متغیر، مفهوم رابطه و مفهوم تابع است.

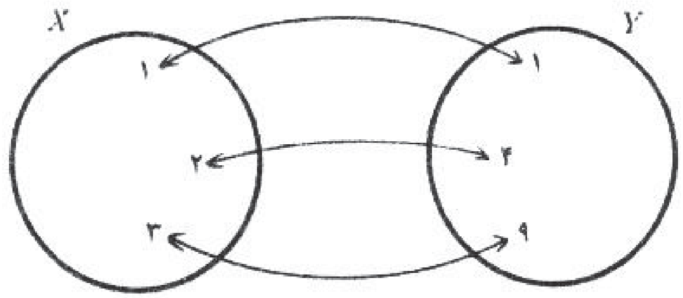
چند مثال

مثال ۱. *می‌دانیم طول ضلع مربعی، با عدد طبیعی x، که کوچکتر از ۴ است، معین شده است. رابطهٔ بین ضلع و مساحت این مربع را، چگونه می‌توان بیان کرد؟*

حل. ۱) طول ضلع مربع، عددی است طبیعی و کوچکتر از ۴. بنابراین، طول ضلع مربع، یکی از عضوهای این مجموعه است:

$$X = \{۱, ۲, ۳\}$$

و اگر طول ضلع مربع را x بنامیم، می‌توانیم بنویسیم: $x \in X$.



شکل ۱۱

عدد مساحت مربع، یکی از عضوهای مجموعهٔ Y می‌تواند باشد، که در آن

$$Y = \{۱, ۴, ۹\}$$

و اگر عدد مساحت مربع را y بنامیم، می‌توانیم بنویسیم: $y \in Y$.

تا این‌جا، با دو مجموعهٔ عددی سروکار داشتیم که با هم بستگی دارند، یعنی هر عضو مجموعهٔ X متناظر با عضوی از مجموعهٔ Y است (شکل ۱۱).

بستگی بین عضوهای دو مجموعهٔ X و Y، **یک به یک** است، یعنی هر عضو X با یک، و تنها یک عضو Y بستگی دارد و، برعکس، هر عضو Y، با یک، و تنها یک عضو X بستگی دارد. می‌گویند: **عضوهای دو مجموعهٔ X و Y، در تناظر یک به یک هستند.**

این دو مجموعه را می‌توان در هم فرو برد و به صورت یک مجموعه نشان داد که، در آن، هر عضو شامل دو عدد باشد، یکی معرف عدد طول ضلع مربع و دیگری معرف عدد مساحت مربع؛ به این ترتیب:

$$Z = \{(۱, ۱), (۲, ۴), (۳, ۹)\}$$

مجموعهٔ Z سه عضو دارد؛ هر عضو شامل دو عدد است که عدد سمت

چپ، نمایندهٔ طول ضلع و عدد سمت راست، نمایندهٔ مساحت مربع است. در این‌جا، هر عضو، از دو عدد (یا آن طور که معمول است، یک زوج عدد) تشکیل شده است؛ درضمن جای عددهای هر زوج را نمی‌توان با هم عوض کرد (به‌جز زوج اول، که دو عدد آن یکی است)؛ مثلاً زوج (۲, ۴) را نمی‌توان به صورت (۴, ۲) نوشت، زیرا (۴, ۲) به معنای آن است که مربع به ضلع ۴، مساحتی برابر ۲ دارد که درست نیست. به این گونه زوج‌ها (که جای عددهای آن را نمی‌توان با هم عوض کرد) **زوج مرتب** گویند. مجموعهٔ Z *سه عضو دارد که هر عضو آن، یک زوج مرتب است.* اگر هر عضو Z را با (x, y) نشان دهیم، باید x عضو مجموعهٔ X و y عضو مجموعهٔ Y باشد.

می‌بینیم، رابطهٔ بین طول ضلع مربع و عدد مساحت آن را، توانستیم هم به یاری نمودار وِن (در مجموعه‌ها) و هم به یاری مجموعهٔ Z که شامل عضوهایی به صورت زوج‌های مرتب است، نشان دهیم.

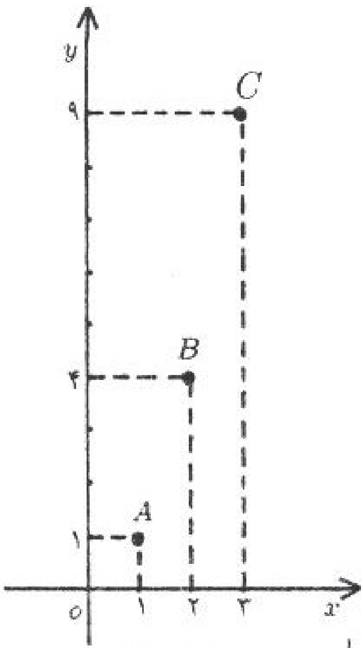
مجموعه‌ای که شامل زوج‌های مرتب باشد، یکی از بهترین وسیله‌ها، برای نشان دادن رابطه یا بستگی بین دو متغیر است، به ویژه وقتی که تعداد عضوهای این مجموعه (یعنی تعداد زوج‌های مرتب) محدود باشد.

اگر، همان طور که پیش از این قرار گذاشتیم، x را طول ضلع و y را عدد مساحت مربع بگیریم، می‌توانیم بگوییم که، مجموعهٔ Z، از سه زوج مرتب (x, y) تشکیل شده، به نحوی که

$$x \in \{۱, ۲, ۳\} \text{ و } y \in \{۱, ۴, ۹\}$$

همچنین، می‌توانستیم، رابطهٔ x و y (طول و مساحت مربع) را به یاری یک جدول نشان دهیم:

x	۱	۲	۳
y	۱	۴	۹



شکل ۱۲

۲) روش دیگر نشان دادن رابطهٔ x و y، روش نموداری، یعنی استفاده از دستگاه محورهای مختصات است. اگر محور افقی را محور معرف طول ضلع مربع و محور قائم را معرف عدد مساحت مربع بگیریم، نقطه‌های A و B و C در شکل ۱۲، معرف رابطهٔ بین طول ضلع و عدد مساحت مربع‌اند:

$$A \left| \begin{matrix} ۱ \\ ۱ \end{matrix} \right. ,\ B \left| \begin{matrix} ۲ \\ ۴ \end{matrix} \right. ,\ C \left| \begin{matrix} ۳ \\ ۹ \end{matrix} \right.$$

۳) وقتی x را معرف طول ضلع و y را معرف عدد مساحت مربع بگیریم، می‌توان رابطهٔ بین x و y را به این صورت نوشت:

$$y = x^{۲},\ x \in \mathbf{N},\ ۱ \leq x < ۴$$

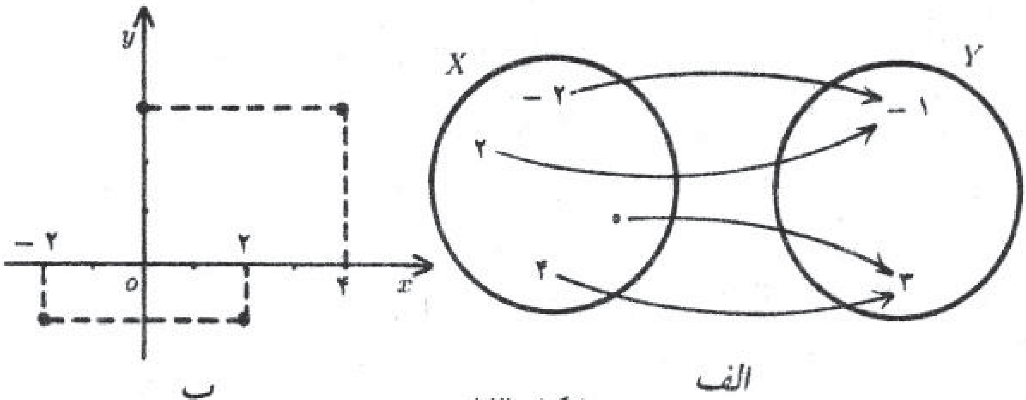
این را، **رابطهٔ دستوری** (یا رابطهٔ فرمولی) بین x و y گویند.

در این مثال، مجموعهٔ X را حوزهٔ تعریف x و مجموعهٔ Y را حوزهٔ تعریف y می‌گویند و این به معنای آن است که x (یعنی طول ضلع مربع) تنها می‌تواند یکی از عضوهای مجموعهٔ X (یعنی ۱ یا ۲ یا ۳) و عدد مساحت مربع، تنها می‌تواند یکی از عضوهای مجموعهٔ Y (یعنی ۱ یا ۴ یا ۹) باشد.

مثال ۲. *رابطهٔ دستوری (یا فرمولی) بین عددهای درست x و y، به این صورت داده شده است:*

$$(x - y)(x - ۱) = ۳ \qquad (۱)$$

مجموعهٔ زوج‌های مرتب (x, y) را تشکیل دهید. حوزهٔ تعریف x و حوزهٔ تعریف y را پیدا کنید. آیا x و y، در تناظر یک به یک هستند؟ نمایش نموداری رابطهٔ x و y، در دستگاه محورهای مختصات به چه صورتی درمی‌آید؟



شکل ۱۳

حل. رابطهٔ (۱) را می‌توان، پس از انجام عمل‌های ساده، به این صورت نوشت:

$$y = x - \frac{۳}{x - ۱} \qquad (۲)$$

چون x و y، عددهای درستی هستند، باید حاصل کسر $\frac{۳}{x-۱}$، عددی درست، یعنی عدد ۳ بر $x - ۱$ بخش‌پذیر باشد. عدد ۳، تنها بر یکی از ۴ عدد درست ۱−، ۳−، ۱ و ۳ بخش‌پذیر است.

اگر $x - ۱ = -۱$، آن وقت $x = ۰$ و $y = ۳$؛

اگر $x - ۱ = -۳$، آن وقت $x = -۲$ و $y = -۱$؛

اگر $x - ۱ = ۱$، آن وقت $x = ۲$ و $y = -۱$؛

اگر $x - ۱ = ۳$، آن وقت $x = ۴$ و $y = ۳$.

بنابراین، مجموعهٔ زوج‌های مرتب (x, y)، چنین است:

$$A = \{(۰, ۳), (-۲, -۱), (۲, -۱), (۴, ۳)\}$$

حوزهٔ تعریف x، عبارت است از مجموعهٔ $X = \{۰, -۲, ۲, ۴\}$ و حوزهٔ تعریف y، مجموعهٔ $Y = \{-۱, ۳\}$ است.

در شکل ۱۳_الف، به یاری نمودار وِن، و در شکل ۱۳_ب به یاری دستگاه محورهای مختصات، رابطهٔ بین x و y نشان داده شده است. در جدول زیر هم، همین رابطه را می‌بینید:

x	-۲	۰	۲	۴
y	-۱	۳	-۱	۳

روشن است که x و y، در تناظر یک به یک نیستند: به‌ازای $x = -۲$ و $x = ۲$، یک مقدار برای y به دست می‌آید ($y = -۱$)؛ همچنین، به‌ازای $x = ۰$ و $x = ۴$ هم، یک مقدار برای y به دست می‌آید ($y = ۳$).

مثال ۳. *رابطهٔ بین x و y، با دستور $x = y^۲$ مشخص شده است. جنبه‌های مختلف این رابطهٔ دستوری را بررسی کنید.*

حل. روشن است که x نمی‌تواند مقدارهای منفی را اختیار کند، ولی y می‌تواند هر عدد حقیقی باشد. بنابراین $x \geq ۰$ (حوزهٔ تعریف) و $y \in \mathbf{R}$ (حوزهٔ مقدارهای y).

در این‌جا، به‌ازای هر مقدار مثبت x، دو مقدار برای y به دست می‌آید:

اگر $x = ۱$، آن وقت $y = \pm ۱$؛

اگر $x = ۲$، آن وقت $y = \pm\sqrt{۲}$؛

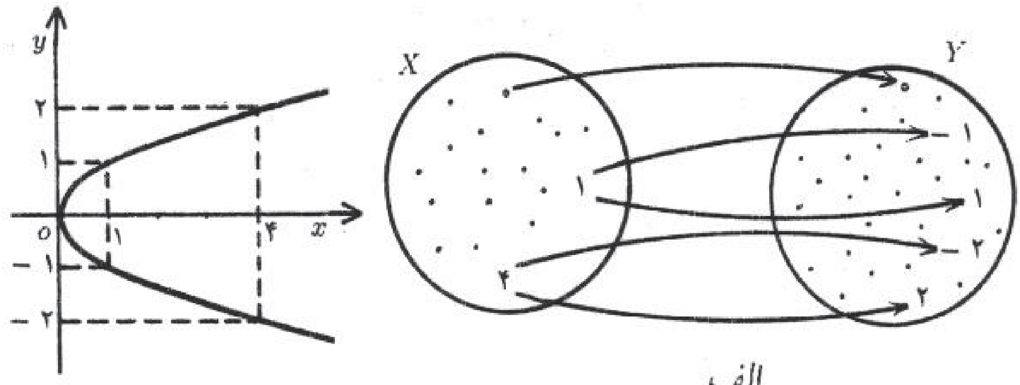
اگر $x = \sqrt[۳]{۱۰}$، آن وقت $y = \pm\sqrt[۶]{۱۰}$؛ ....

به این ترتیب، در زوج‌های مرتب (x, y)، به‌جز زوج $(۰, ۰)$، هر $x > ۰$، متناظر با دو مقدار y است (که قرینهٔ یکدیگرند)؛ برخی از عضوهای مجموعهٔ این زوج‌های مرتب، در این‌جا داده شده است:

$$M = \{\ldots, (۰, ۰), (۱, ۱), (۱, -۱), (۴, ۲), (۴, -۲), \ldots\}$$

x	...	۰	۱	۴	۹	$a > ۰$	...
y	...	۰	± ۱	± ۲	± ۳	$\pm\sqrt{a}$	...

و روشن است که x و y، در تناظر یک به یک نیستند. این رابطهٔ بین x و



ب شکل ۱۴ الف

y، در شکل ۱۴ـ الف به یاری نمودار وِن و در شکل ۱۴ـ ب به یاری دستگاه محورهای مختصات نشان داده شده است.

§۲. تابع

در مثال‌های ۱ و ۲ و ۳، با سه نوع رابطه آشنا شدیم. در مثال ۱، x و y در تناظر یک به یک بودند، ولی در مثال‌های ۲ و ۳، بین x و y، تناظر یک به یک وجود نداشت، ولی این دو مثال هم، تفاوت‌هایی با هم داشتند. یکی از تفاوت‌ها، این است: در مثال ۲، هر x تنها متناظر با یک مقدار از y است، در حالی که در مثال ۲، هر x (به‌جز ۰)، متناظر با دو مقدار y است.

اگر در رابطه‌ای، بین x و y، تناظر یک به یک وجود داشته باشد، (مثال ۱)، یا هر مقدار x، متناظر با یک، و تنها یک مقدار y باشد، رابطهٔ بین x و y را، **رابطهٔ تابعی** *یا به طور ساده* **تابع** *گویند.*

مجموعهٔ زوج‌های مرتب

$$A = \{(-۱, ۴), (۰, ۲), (۴, -۲)\}$$

یک تابع است. مجموعهٔ عددی $X = \{-۱, ۰, ۴\}$ حوزهٔ تعریف یا **دامنهٔ تابع** و مجموعهٔ عددی $Y = \{۴, ۲, -۲\}$ حوزهٔ مقدارها یا **بُرد تابع** را نشان

می‌دهند. در حالی که مجموعهٔ زوج‌های مرتب

$$B = \{(-۱,۴), (۰,۲), (-۱,۳)\}$$

یک تابع نیست، زیرا زوج‌های مرتب $(-۱,۴)$ و $(-۱,۳)$، به‌ازای یک مقدار x $(x = -۱)$، دو مقدار مختلفِ y را ($y = ۴$ و $y = ۳$) به ما می‌دهند. بنابراین، در یک تابع، اگر دو زوج مرتب $(x, y_۱)$ و $(x, y_۲)$ وجود داشته باشد، به معنای آن است که $y_۱ = y_۲$.

همچنین رابطهٔ دستوری $y = x^۲$ (برای عددهای حقیقی x و y)، یک تابع است، زیرا به‌ازای هر عدد حقیقی x، تنها یک مقدار برای y به دست می‌آید (گرچه عکس آن درست نیست، یعنی به ازای هر مقدار مثبت y، برای x دو مقدار به دست می‌آید و، درضمن، به‌ازای هر مقدار منفی y، مقداری حقیقی برای x به دست نمی‌آید). در تابع $y = x^۲$، مجموعهٔ همهٔ عددهای حقیقی (مجموعهٔ $\mathbf{R}$) دامنهٔ تابع، و مجموعهٔ عددهای غیر منفی، بُرد آن است.

اندکی دقیق‌تر و به زبان مجموعه‌ها صحبت کنیم.

۱) اگر دو مجموعهٔ A و A' را در نظر بگیریم و هر عضو $a \in A$ را، متناظر با یک، و تنها یک عضو $a' \in A'$ قرار دهیم، گویند، **نگاشت f از مجموعهٔ A در مجموعه A'** داده شده است. در ضمن می‌نویسند:

$$A \overset{f}{\Rightarrow} A' \text{ یا } f : A \Rightarrow A'$$

عضو a' را نگارهٔ عضو a در نگاشت f نامیده‌اند و آن را به این صورت می‌نویسند:

$$a \xrightarrow{f} a' \text{ یا } a' = f(a)$$

در ریاضیات، بیشتر با مجموعه‌های عددی سروکار داریم و، بنابراین، تعریف کلی بالا (برای نگاشت یک مجموعه در مجموعهٔ دیگر)، دست کم در

ریاضیات مقدماتی، کمتر مورد استفاده قرار می‌گیرد. بنابراین، بهتر است، تعریف را در مجموعه‌های عددی بدهیم (نه مجموعه، به مفهوم کلی آن).

۲) دو مجموعهٔ عددی X و Y را در نظر می‌گیریم. اگر هر عضو $x \in X$، متناظر با یک و تنها یک عضو $y \in Y$ باشد، گویند y تابعی است از x و می‌نویسند: $y = f(x)$. در این صورت $y = f(x)$ یک تابع است، مجموعهٔ X دامنهٔ آن و مجموعهٔ Y بُرد آن است.

x و y، هر دو متغیرند: تغییر x در مجموعهٔ X و تغییر y در مجموعهٔ Y. متغیر x را **متغیر مستقل** یا به طور ساده **متغیر** و متغیر y را **متغیر تابع** یا به طور ساده **تابع** گویند.

در واقع، مجموعهٔ Y (بُرد تابع)، باید مجموعهٔ همهٔ عددهای به صورت $f(x)$ باشد که، در آن $x \in X$.

معمول است که، دامنهٔ تابع، یعنی مجموعهٔ مقدارهای x (مجموعهٔ X) را با $D(f)$ و مجموعهٔ مقدارهای تابع، یعنی مجموعهٔ مقدارهایی را که $f(x)$ قبول می‌کند (مجموعهٔ Y) را با $E(f)$ نشان می‌دهند.

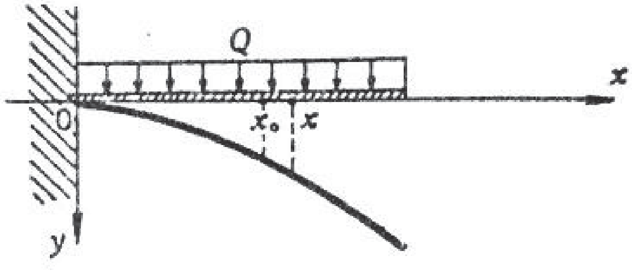
اگر $x_\circ \in X$ متناظر با $y_\circ \in Y$ باشد، می‌نویسند $y_\circ = f(x_\circ)$.

نمودار $y = f(x)$، به معنای مجموعهٔ همهٔ نقطه‌هایی در دستگاه محورهای مختصات است که، مختصات آن‌ها، برابر $(x$ و $f(x))$ باشد، به شرطی که داشته باشیم: $x \in X$

تابع $y = f(x)$ را، گاه تابع با ضابطهٔ $y = f(x)$ گویند. در این کتاب و جلدهای بعدی آن، هرجا گفته شود: تابع $y = f(x)$، منظور تابع با ضابطهٔ $y = f(x)$ است.

بُرد تابع، بستگی به دامنهٔ آن دارد و، بنابراین، دستور یا ضابطهٔ $y = f(x)$ می‌تواند مُعرف تابع‌های مختلفی باشد.

مثال ۴. یکی از عنصرهای اصلی هر ساختمانی، «تیر» است که می‌تواند چوبی یا فلزی باشد. وقتی دو سر تیر بر دو پایه تکیه داشته باشد، آن را تیر



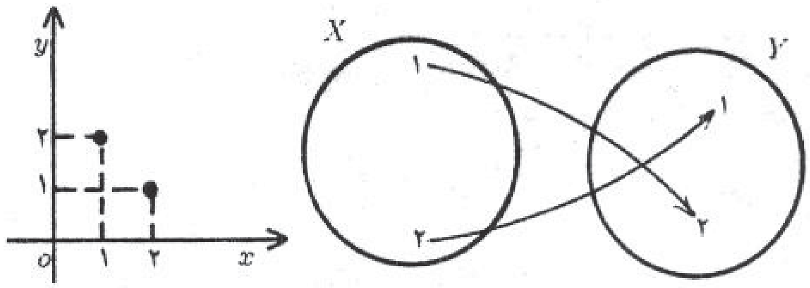
شکل ۱۵

ساده و در حالتی که، تنها یک انتهای آن متکی بر پایه باشد (مثل حالتی که در ساختن بالکون‌ها به کار می‌رود) *تیر آزاد* یا *تیر طُره‌ای* نامیده می‌شود (به هر حال، تیر را *تیر حمال* یا *تیر حامل* می‌گویند). پیش از آن که از تیر حمال ساختمانی استفاده شود، باید مقاومت آن را آزمایش کرد، چرا که تیر، زیر باری که باید تحمل کند، دچار خمیدگی می‌شود.

بحث ما در این‌جا، دربارهٔ تیر آزاد یا تیر طُره‌ای است. فرض کنید، انتهای چپ تیر بر پایه‌ای محکم شده باشد و روی آن، باری به وزن Q، که به طور یکنواخت بر سراسر تیر اثر می‌کند، قرار داده باشیم. طول بخش آزاد تیر را برابر l می‌گیریم. نسبت $\frac{Q}{l}$ را *شدت بار* گویند. هر چه شدت بار بیشتر باشد، خمیدگی تیر بیشتر می‌شود. خمیدگی تیر را، در نقطه‌ای به فاصلهٔ x، که در انتهای چپ آن حساب شده (بدون در نظر گرفتن بخشی که در دیوار یا پایه فرو رفته است) با y نشان می‌دهیم (شکل ۱۵). هر نقطهٔ x، متناظر با یک، و تنها یک مقدار خمیدگی است؛ بنابراین، خمیدگی y، تابعی است از فاصلهٔ x؛ درضمن $0 \leq x \leq l$. بیشترین خمیدگی، در انتهای آزاد تیر، یعنی به‌ازای $x = l$ به دست می‌آید. نمودار تابع $y = f(x)$، در شکل ۱۵ داده شده است.

مثال ۵. *تابع* $y = \frac{2}{x}$ *را در حالت‌های زیر بررسی کنید:*

الف) $x \in \mathbf{N}$ و $y \in \mathbf{N}$؛ ب) $x \in \mathbf{Z}$ و $y \in \mathbf{Z}$؛ ج) $1 \leq x \leq 2$؛ د) $x > 0$؛ هـ) $x \in \mathbf{R}$



x	۱	۲
y	۲	۱

شکل ۱۶

حل. الف) در این حالت، تنها با دو زوج مرتب سروکار داریم

$$\{(۱, ۲),\ (۲, ۱)\};\ y = \frac{۲}{x};\ x, y \in \mathbf{N}$$

در شکل ۱۶، گونه‌های مختلف بیان این تابع داده شده است: مجموعه‌ای شامل دو زوج مرتب؛ رابطهٔ دستوری؛ نمودار، در دستگاه محورهای مختصات؛ نمودار وِن؛ جدول.

ب) تابع شامل چهار زوج مرتب است:

$$\{(-۲, -۱),\ (-۱, -۲),\ (۱, ۲),\ (۲, ۱)\}$$

که در آن

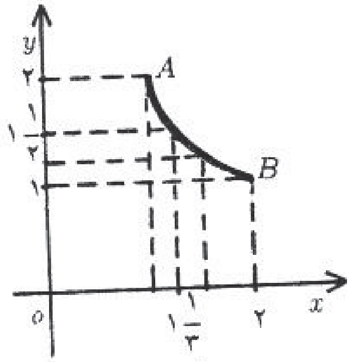
دامنه: $X = Df = \{-۲, -۱, ۱, ۲\}$

بُرد: $Y = Ef = \{-۱, -۲, ۲, ۱\}$

خودتان روی دستگاه محورهای مختصات، نمودار وِن و جدول تابع را نشان دهید.

ج) دامنهٔ تابع، شامل همهٔ عددهای حقیقی از ۱ تا ۲ است:

دامنه: $x \in \mathbf{R} : ۱ \leq x \leq ۲$



شکل ۱۷

جدول متناظر (x, y)، برای برخی مقدارهای x، چنین است:

x	۱	$1\frac{1}{3}$	$1\frac{1}{2}$	۲
y	۲	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{3}$	۱

در شکل ۱۷، نمودار تابع $y = \frac{2}{x}$، برای $1 \leq x \leq 2$ داده شده است.
درضمن برای این تابع:

دامنه: $X = Df : 1 \leq x \leq 2$

بُرد: $Y = Ef : 1 \leq y \leq 2$

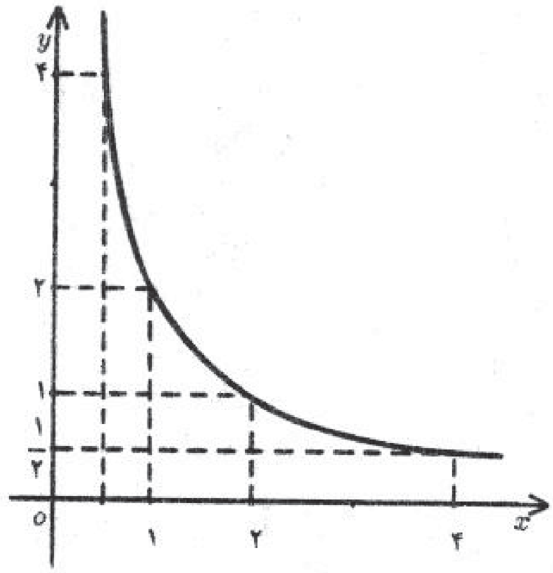
مجموعهٔ تابع، شامل بی‌نهایت زوج مرتب است.

د) نمودار تابع در شکل ۱۸ داده شده است.

$$\begin{cases} y = \frac{2}{x} \\ x > 0 \end{cases}$$

دامنه: $x > 0, x \in \mathbf{R}$

بُرد: $y > 0, y \in \mathbf{R}$



شکل ۱۸

ه) x می‌تواند همهٔ عددهای حقیقی، به‌جز $x = \circ$ باشد؛ برای y هم، به‌جز ۰، هر عدد حقیقی دیگر به دست می‌آید:

دامنه: $x \neq \circ, x \in \mathbf{R}$

بُرد: $y \neq \circ, y \in \mathbf{R}$

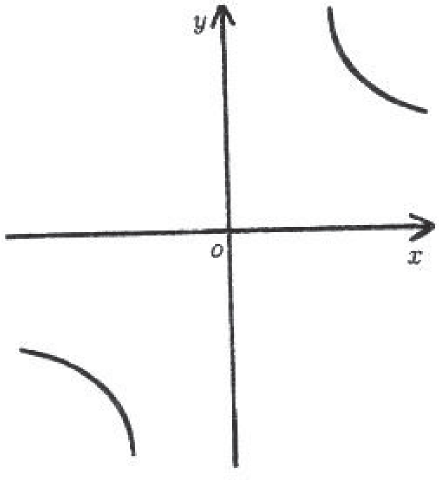
شکل ۱۹، نمودار تابع را، در دستگاه محورهای مختصات، نشان می‌دهد.

به این ترتیب، تابع وقتی مشخص است که دامنهٔ آن معلوم باشد. اگر در مساله، شرطی برای x (متغیر) نداده باشند، باید دامنه (یعنی مقدارهای متغیر) را در $\mathbf{R}$ (عددهای حقیقی) به حساب آورد و همهٔ عددهای حقیقی قابل قبول را جزو دامنه در نظر گرفت.

پیدا کردن بُرد تابع (یعنی مقدارهایی که تابع (y) می‌تواند اختیار کند) همیشه ساده نیست و گاهی دشواری‌هایی به وجود می‌آورد.

مثال ۶. *دامنه و بُرد تابع با ضابطهٔ زیر را پیدا کنید.*

$$y = x^{۲} - x - ۲$$



شکل ۱۹

حل. x می‌تواند هر عدد حقیقی را اختیار کند.

$$x \in \mathbf{R} \qquad \text{دامنه:}$$

برای پیدا کردن بُرد، تابع را این طور می‌نویسیم:

$$y = \left(x - \frac{۱}{۲}\right)^{۲} - \frac{۹}{۴}$$

اکنون روشن است که y، نمی‌تواند مقداری کمتر از $-\frac{۹}{۴}$ باشد:

به‌ازای $x = \frac{۱}{۲}$، داریم: $y = \frac{۹}{۴}$؛

و به ازای $x \neq \frac{۱}{۲}$: $y > -\frac{۹}{۴}$

بنابراین، بُرد تابع عبارت است از $y \geq -\frac{۹}{۴}$.

بُرد را با روش دیگری هم می‌توان به دست آورد. داریم:

$$x^{۲} - x - ۲ - y = ۰ \qquad (*)$$

اگر بخواهیم x، عددی حقیقی باشد، باید معادلهٔ درجه دوم $(*)$، ریشه‌های حقیقی داشته باشد، یعنی مبیّن آن منفی نباشد:

$$\Delta = ۱ - ۴(-۲ - y) \geq ۰ \Rightarrow y \geq -\frac{۹}{۴}$$

مثال ۷. *دامنه و بُرد این تابع را پیدا کنید.*

$$y = \frac{x^۲ + ۱}{x}$$

حل. دامنهٔ تابع عبارت است از $x \neq ۰$.

برای بُرد تابع داریم $y = x + \frac{۱}{x}$ و می‌دانیم عبارت $x + \frac{۱}{x}$ برای $x > ۰$ از ۲ بزرگتر و برای $x < ۰$ از ۲− کوچکتر است (مثلاً بخش نابرابری و نامعادله صفحه ۲۰۱ مثال ۴ را در جلد دوم «ریاضیات محاسبه‌ای» ببینید).

بُرد تابع: $y \geq ۲$ یا $y \leq -۲$

مثال ۸. *برای تابع* $y = \sqrt{x - x^۲}$، *دامنه و بُرد را پیدا کنید.*

حل. برای این که مقدار y حقیقی باشد، باید داشته باشیم:

$$x - x^۲ \geq ۰ \Rightarrow x(۱ - x) \geq ۰$$

برای این‌که حاصل ضرب دو مقدار مثبت باشد، باید هر دوی آن‌ها مثبت یا هر دوی آن‌ها منفی باشند:

$$\begin{cases} x \geq ۰ \\ ۱ - x \geq ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq ۰ \\ x \leq ۱ \end{cases} \Rightarrow ۰ \leq x \leq ۱$$

$$\begin{cases} x \leq ۰ \\ ۱ - x \leq ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq ۰ \\ x \geq ۱ \end{cases} \quad \text{پذیرفتنی نیست}$$

بنابراین x تنها می‌تواند مقدارهای از ۰ تا ۱ را قبول کند:

$$\text{دامنه:} \quad 0 \le x \le 1$$

برای پیدا کردن بُرد تابع، در همان آغاز روشن است که y نمی‌تواند منفی باشد. ولی آیا می‌تواند هر مقدار مثبتی را قبول کند؟ داریم:

$$y^2 = x - x^2 \Rightarrow x^2 - x + y^2 = 0$$

برای این که x عددی حقیقی باشد، باید داشته باشیم:

$$\Delta = 1 - 4y^2 \ge 0 \Rightarrow y^2 \le \frac{1}{4}$$

y مقداری غیر منفی است، بنابراین نابرابری $y^2 \le \frac{1}{4}$، منجر به نابرابری $y \le \frac{1}{2}$ می‌شود:

$$\text{بُرد تابع:} \quad 0 \le y \le \frac{1}{2}$$

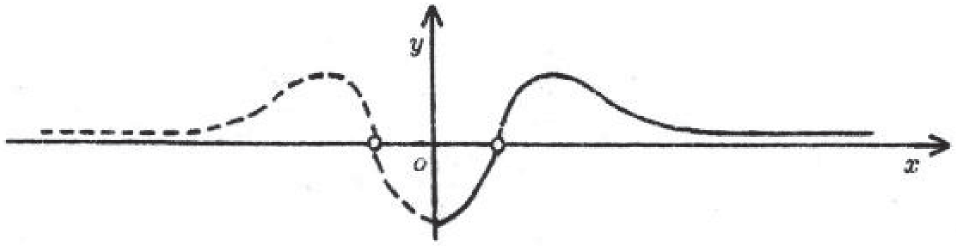
§۳. تابع زوج و تابع فرد

۱) تابع f، به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب داده شده است:

$$f = \{(-2, 0), (-1, -3), (1, -3), (2, 0)\}$$

تابع چنان است که اگر، در آن، همهٔ زوج‌های مرتب (x, y) را به زوج‌های مرتب $(-x, y)$ تبدیل کنیم، f تغییر نمی‌کند. چنین تابعی را زوج گویند. *تابع $f(x)$، وقتی زوج است که، برای آن داشته باشیم:*

$$f(-x) = f(x)$$



شکل ۲۰

تابع‌های $f(x) = \frac{|x|}{x^۲ + ۱}$ و $g(x) = ۲\cos x - ۳$، تابع‌هایی زوج‌اند، زیرا

$$f(-x) = \frac{|-x|}{(-x)^۲ + ۱} = \frac{|x|}{x^۲ + ۱} = f(x)$$
$$g(-x) = ۲\cos(-x) - ۳ = ۲\cos x - ۳ = g(x)$$

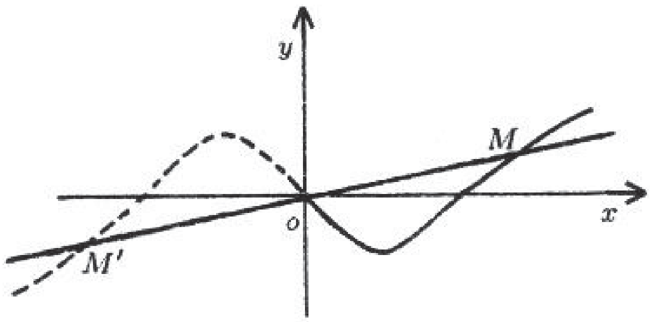
همچنین، شکل ۲۰، نمودار یک تابع زوج را نشان می‌دهد، زیرا روی آن، به ازای هر دو مقدار قرینهٔ x، یک مقدار برای y به دست می‌آید. همین شکل ۲۰ به روشنی نشان می‌دهد که، نمودار یک تابع زوج در دستگاه محورهای مختصات، نسبت به محور $y'y$ متقارن است، یعنی محور $y'y$، محور تقارن آن است: اگر صفحهٔ شکل را روی محور $y'y$ تا کنیم، نیمهٔ راست بر نیمهٔ چپ قرار می‌گیرد.

۲) تابع با ضابطهٔ $f(x) = -x^۳ + x$ $(x \in \mathbf{R})$ را در نظر می‌گیریم. اگر در این تابع، x را به $-x$ تبدیل کنیم، $f(x)$ به $-f(x)$ تبدیل می‌شود:

$$f(-x) = -(-x)^۳ + (-x) = x^۳ - x = -f(x)$$

چنین تابعی را **فرد** گویند.

تابع‌های $f(x) = \frac{x}{x^۲ + ۱}$ و $g(x) = ۲\sin x$، تابع‌های فرد هستند،



شکل ۲۱

زیرا

$$f(-x) = \frac{-x}{x^{۲}+۱} = -f(x),$$
$$g(-x) = ۲\sin(-x) = -۲\sin x = -f(x)$$

همچنین، شکل ۲۱، نمودار یک تابع فرد را نشان می‌دهد: اگر خط راستی از مبداء مختصات بگذرانیم تا منحنی نمودار را در دو نقطهٔ M و M' قطع کند، هم طول‌ها و هم عرض‌های دو نقطهٔ M و M' قرینهٔ یکدیگرند. بنابراین

نمودار هر تابع فرد روی صفحهٔ محورهای مختصات، نسبت به نقطهٔ o متقارن است، یعنی مبداء مختصات، مرکز تقارن آن است.

§۴. عمل با $f(x)$

۱. نماد $f(x)$ را بخوانید: «اِفِ x». f، حرف اول واژهٔ فرانسوی fonction، به معنی «تابع» یا «عمل» است. وقتی می‌گوییم f، یعنی یک تابع و وقتی می‌گوییم $f(x)$، یعنی تابعی با متغیر x.

$f(x)$؛ روی هم، یک واژه و یک نماد است و، با توجه به آن‌چه دیدید، بی‌تردید دچار این اشتباه نمی‌شوید که گمان کنید، گویا منظور، حاصل ضرب f در x است.

برای این که تابع‌های مختلف را با هم اشتباه نکنیم، از حرف‌های دیگری هم (به‌جز f) برای بیان تابع استفاده می‌کنیم: $g(x)$، $h(x)$ و غیره؛ یا $f_1(x)$، $f_2(x)$ و غیره. از نماد $f'(x)$ یا $f''(x)$، برای نام‌گذاری تابع‌ها استفاده نکنید، زیرا این نمادها، برای بیان نوع خاصی از تابع به کار می‌روند که، بعدها، با آن‌ها آشنا خواهیم شد.

۲. این تابع را در نظر می‌گیریم:

$$f(x) = (a - ۱)x + ۲a + ۳$$

که برای هر مقدار حقیقی a، تابع مشخصی را به ما می‌دهد:

$$a = -۳ \Rightarrow f(x) = -۴x - ۳;$$
$$a = ۷ \Rightarrow f(x) = ۶x + ۱۷;$$
$$a = ۰ \Rightarrow f(x) = -x + ۳; \ldots$$

که همهٔ آن‌ها، تابع‌هایی خطی هستند.

آیا به‌ازای $a = ۱$، باز هم تابعی مشخص به دست می‌آید؟ بله! به‌ازای $a = ۱$، با تابع $f(x) = ۵$ روبه‌رو می‌شویم که، به آن، **تابع ثابت** گویند. در واقع، در این‌جا هم، می‌توان متغیر x را در نظر گرفت، ولی چون ضریب آن برابر ۰ است، به ازای هر مقدار حقیقی x، همیشه برای $f(x)$، عدد ۵، که مقداری ثابت است، به دست می‌آید.

تابع ثابت هم، یک تابع خطی است: اگر $f(x) = ۵$ را به صورت $y = ۵$ بنویسیم، در صفحهٔ محورهای مختصات، خط راستی موازی محور $x'x$ به دست می‌آید.

مثال ۹. *برای تابع* $f(x) = \frac{۲x + ۱}{x - ۱}$*، محاسبه کنید:*

۱) $f(۲)$؛ ۲) $f(-\frac{۱}{۲})$؛ ۳) $f(a)$؛ ۴) $f(a+۱)$؛ ۵) $f(۳x)$؛
۶) $f(\frac{۱}{x})$؛ ۷) $f(۲x+۱)$؛ ۸) $f(\frac{۲x-۱}{x+۱})$؛ ۹) $f(f(x))$.

حل. ۱) $f(۲)$، یعنی حاصل $f(x)$ به ازای $x=۲$؛ بنابراین

$$f(۲)=\frac{۲\times ۲+۱}{۲-۱}=۵;$$

۲) $f(-\frac{۱}{۲})=\frac{-۱+۱}{-\frac{۱}{۲}-۱}=۰$؛

۳) $f(a)=\frac{۲a+۱}{a-۱}$. در این‌جا، در واقع نقش x در کسر $\frac{۲x+۱}{x-۱}$ به a واگذار شده است؛

$$۴)\ f(a+۱)=\frac{۲(a+۱)+۱}{(a+۱)-۱}=\frac{۲a+۳}{a}$$

$$۵)\ f(۳x)=\frac{۲(۳x)+۱}{۳x-۱}=\frac{۶x+۱}{۳x+۱}$$

توجه کنید! وقتی با در دست داشتن $f(x)$، می‌خواهیم $f(۳x)$ را محاسبه کنیم، به معنای آن نیست که $۳x$ را با x برابر گرفته‌ایم. در این‌جا، منظور از $f(۳x)$ این است که، در $f(x)$، هرجا به x برخوردیم، به جای آن $۳x$ بگذاریم؛ به زبان دیگر نقش x را به $۳x$ بدهیم؛

$$۶)\ f(\frac{۱}{x})=\frac{۲\times\frac{۱}{x}+۱}{\frac{۱}{x}-۱}=\frac{۲+x}{۱-x}$$

در $f(x)$، باید $x\neq ۱$ بگیریم (مخرج نمی‌تواند برابر صفر باشد). اکنون که $f(\frac{۱}{x})$ را محاسبه می‌کنیم، باید شرط $x\neq ۰$ را به حساب آوریم:

اگر $f(x)=\dfrac{۲x+۱}{x-۱}(x\neq ۱)$، آن وقت

$$f(\frac{۱}{x})=\frac{۲+x}{۱-x}\ (x\neq ۰, x\neq ۱)$$

$$۷)\ f(۲x+۱)=\frac{۲(۲x+۱)+۱}{(۲x+۱)-۱}=\frac{۴x+۳}{۲x}(x\neq ۱, x\neq ۰);$$

$$۸)\ f(\frac{۲x-۱}{x+۱})=\frac{\frac{۴x-۲}{x+۱}+۱}{\frac{۲x-۱}{x+۱}-۱}=\frac{۵x-۱}{x-۲}$$

برای تابع اخیر، سه شرط داریم: $x\neq ۱$ (برای $f(x)$)؛ $x\neq -۱$ (تا کسر $\dfrac{۲x-۱}{x+۱}$ معنا داشته باشد) و $x\neq ۲$ (که کسر $\dfrac{۵x-۱}{x-۲}$ بی‌معنا نباشد)؛

$$۹)\ f(f(x))=f(\frac{۲x+۱}{x-۱})=\frac{۲\times\frac{۲x+۱}{x-۱}+۱}{\frac{۲x+۱}{x-۱}-۱}=$$

$$=\frac{(۴x+۲)+(x-۱)}{(۲x+۱)-(x-۱)}=\frac{۵x+۱}{x+۲}(x\neq ۱, x\neq -۲)$$

مثال ۱۰. اگر بدانیم $f(۲x-۳)=x^۲+۱$، $f(x)$ را پیدا کنید.

حل. برای ساده‌تر شدن عمل‌ها، فرض می‌کنیم:

$$۲x-۳=t\Rightarrow x=\frac{t+۳}{۲}$$

مساله، به این صورت درمی‌آید: اگر بدانیم:

$$f(t)=\left(\frac{t+۳}{۲}\right)^۲+۱=\frac{۱}{۴}t^۲+\frac{۳}{۲}t+\frac{۱۳}{۴}\qquad (*)$$

آن وقت $f(x)$ را پیدا کنید. و این، به معنای آن است که، در $(*)$، نقش t را به x بدهیم:

$$f(x) = \frac{۱}{۴}x^۲ + \frac{۳}{۲}x + \frac{۱۳}{۴}$$

مثال ۱۱. اگر داشته باشیم:

$$f(x) = \frac{۱}{x - ۲} \text{ و } g(x) = \sqrt{x}$$

مطلوب است محاسبهٔ $f(g(x))$ و $g(f(x))$.

حل: در آغاز یادآوری می‌کنیم که $f(g)$ و $g(f)$ را به صورت fog و gof هم نمایش می‌دهند. داریم:

$$f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = \frac{۱}{\sqrt{x} - ۲}, x \geq ۰, x \neq ۴, x \neq ۲$$

$$g(f(x)) = g\left(\frac{۱}{x - ۲}\right) =$$

$$= \sqrt{\frac{۱}{x - ۲}} = \frac{۱}{\sqrt{x - ۲}}, (x > ۲)$$

۵§. تابع وارون

فرض کنیم دو مجموعهٔ عددی X و Y در تناظر یک به یک باشند، یعنی هر $x \in X$ متناظر با یک، و تنها یک $y \in Y$ و، برعکس، هر $y \in Y$ متناظر با یک و تنها یک $x \in X$ باشد. در این صورت گویند، تابع $y = f(x)$، وارون پذیر است. تابع وارون (یا تابع معکوس)، با تبدیل نقش x و y به یکدیگر در تابع $y = f(x)$ به دست می‌آید و با $y = f^{-۱}(x)$ نشان داده می‌شود.

مثال ۱۲. *وارون تابع* $y = ۲x + ۱$ *را پیدا کنید.*

حل. اگر در $y = ۲x + ۱$، x را به y و y را به x تبدیل کنیم، به $x = ۲y + ۱$ می‌رسیم:

$$f(x) = ۲x + ۱,\ f^{-۱}(x) = \frac{۱}{۲}(x - ۱)$$

یادداشت. نقطهٔ $M(a, b)$ را در نظر می‌گیریم. اگر در مختصات نقطهٔ M، جای x و y را با هم عوض کنیم، نقطهٔ $M'(b, a)$ به دست می‌آید. خط راستی که از دو نقطهٔ M و M' می‌گذرد، بر نیمساز ربع اول و سوم عمود است، زیرا اگر ضریب زاویهٔ خط راست MM' را m بگیریم، داریم:

$$m = \frac{y_M - y'_M}{x_M - x'_M} = \frac{b - a}{a - b} = -۱$$

مختصات نقطهٔ وسط پاره‌خط راست MM' (نقطهٔ P) روی نیمساز ربع اول و سوم قرار دارد، زیرا

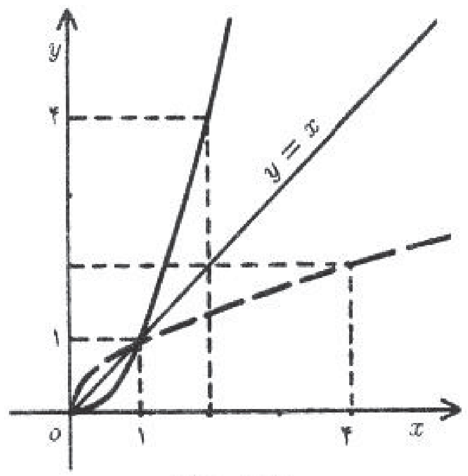
$$P\left(\frac{a + b}{۲}, \frac{a + b}{۲}\right)$$

بنابراین M'، قرینهٔ M نسبت به نیمساز ربع اول و سوم (خط راست $y = x$) است.

برای پیدا کردن تابع وارون، x را به y و y را به x تبدیل می‌کنیم، بنابراین نمودار تابع وارون، قرینهٔ نمودار تابع، نسبت به نیمساز ربع اول و سوم است.

مثال ۱۳. *وارون تابع* $y = x^۲$ *را با شرط* $x \geq ۰$ *پیدا کنید و نمودار آن را رسم کنید.*

حل. با شرط $x \geq ۰$، تابع $y = x^۲$ وارون پذیر است و تابع وارون آن، به صورت $y = \sqrt{x}$ $(x \geq ۰)$ درمی‌آید.



شکل ۲۲

در شکل ۲۲ نمودار $y = x^۲$ $(x \geq ۰)$ با خط کامل و نمودار $y = \sqrt{x}$ $(x \geq ۰)$ به صورت نقطه‌چین داده شده است که، نسبت به خط راست $y = x$، قرینهٔ یکدیگرند.

§۶. فاصله یا بازه

تاکنون، دامنهٔ تابع، یعنی فاصله‌ای عددی را که متغیر x می‌تواند بپذیرد، به صورت $a \leq x \leq b$ یا $x > ۰$ و غیره نشان می‌دادیم. در این‌جا، با چند نماد، برای بیان فاصلهٔ تغییر متغیر آشنا می‌شویم. در ضمن، بهتر است به جای واژهٔ «فاصله»، از واژهٔ فارسی «بازه» استفاده کنیم:

۱) $a \leq x \leq b \Rightarrow x \in [a, b]$;

۲) $a < x < b \Rightarrow x \in (a, b)$ یا $x \in]a, b[$;

۳) $a < x \leq b \Rightarrow x \in (a, b]$ یا $x \in]a, b]$;

۴) $x \geq a \Rightarrow x \in [a, \infty)$ یا $x \in [a, \infty[$;

۵) $x > a \Rightarrow x \in (a, \infty)$ یا $x \in]a, \infty[$;

۶) $x \leq a \Rightarrow x \in (-\infty, a]$ یا $x \in]-\infty, a]$;

$$۷)\ x < a \Rightarrow x \in (-\infty, a) \text{ یا } x \in]-\infty, a[$$

«∞» نماد بی‌نهایت است. بی‌نهایت عدد نیست، یک مفهوم است (به معنای بزرگتر از هر عددی).

(a, b) را بازهٔ باز می‌گویند، یعنی متغیر می‌تواند به a یا b نزدیک شود، ولی برابر a یا b نمی‌تواند باشد؛ در حالی که $[a, b]$ بازهٔ بسته است، یعنی معرف همهٔ عددهای بین a و b و خود a و b است.

*۷§. مفهوم تابع در گذر زمان

برای نخستین بار، یوهان برنولی (۱۶۶۷_۱۷۴۸) در سال ۱۷۱۸ میلادی نماد φx را برای تابعی با متغیر x به کار برد و در سال ۱۷۳۴ میلادی، لئونارد اولر (۱۷۰۷_۱۷۸۳) برای تابع از نماد $f(x)$ استفاده کرد که تا امروز، آن را به کار می‌بریم.

ولی مفهوم تابع و تعریف آن، در طول زمان تغییر کرده و یا دقیق‌تر، تکامل یافته است. مفهوم‌های ریاضی هم، مثل هر پدیده و مفهوم دیگری، در هر زمان، بسته به دانش و آگاهی‌های موجود تنظیم می‌شوند و با بالا رفتن دانش و آگاهی انسان، روز به روز دقیق‌تر و عام‌تر می‌شوند.

اقلیدس ریاضی‌دان بزرگ یونان پیش از میلاد، برای تعریف نقطه می‌گفت: «نقطه چیزی است که بُعدی نداشته باشد». این تعریف را، ریاضی‌دانان بعد از اقلیدس، تا دوهزار سال بعد پذیرفته بودند. ولی اگر دقت کنیم، این تعریف، چیزی به ما نمی‌دهد. می‌گوید «نقطه چیزی است». چه چیزی؟ «چیز» یعنی چه؟ و سپس، از واژهٔ «بُعد» استفاده می‌کند، بدون این که «بُعد» را تعریف کرده باشد. همین قدر یادآوری می‌کنیم که مفهوم «بُعد» در دهه‌های اخیر شناخته شده است و با استفاده از مفهوم‌های کم و بیش دشوار ریاضیات عالی، تعریف شده است. تعریف اقلیدس از نقطه، در واقع تعریف نیست

و، برای شناخت نقطه، خواننده را به مفوم‌های مبهم (مثل «چیز») یا ناشناخته (مثل «بُعد») حواله می‌دهد.

یا وقتی که اقلیدس در یکی از اصل‌های خود می‌گوید «کُل از جزء خودش بزرگتر است»، با دانش ریاضی زمان خود، نمی‌توانست از مفهوم مجموعه‌های بی‌پایان استفاده کند و، در ذهن خود، تنها به مجموعه‌های با پایان توجه داشته است. امروز می‌دانیم که باید این اصل را دقیق‌تر کرد و گفت: «کُل، به شرطی که نامحدود نباشد، از جزء خود بیشتر است». در غیر این صورت و، با پذیرفتن اصل اقلیدس، باید قبول کنیم، مثلاً تعداد عددهای فرد یا تعداد عددهای اول، از تعداد عددهای طبیعی کمتر است که، البته، این طور نیست.

این را هم اشاره کنیم که، هر حرف یا نظریهٔ تازه‌ای، خیلی زود مورد پذیرش قرار نمی‌گیرد. ژرژکانتور را (که پایه‌گذار نظریهٔ مجموعه‌ها بود) آن قدر مسخره کردند که دچار بیماری روانی شد. از آن ساده‌تر، وقتی ریاضی‌دانان متوجه شدند که، برای عددهای کوچکتر از صفر هم، باید ارزش قایل شد و از آن‌ها استفاده کرد، بسیاری از ریاضی‌دانان (از جمله فرانسوا ویت ریاضی‌دان بزرگ فرانسوی) آن را نپذیرفتند و وجود عددهای منفی را مورد استهزا قرار دادند.

حتا برای دانشمندان دشوار است، دست از عادت سنتی خود در کارهای علمی بردارند و دیدگاه‌های تازه را بپذیرند؛ پذیرش اندیشه‌های تازه، شجاعت فکری می‌خواهد.

□

بستگی بین دو متغیر، مثل بستگی طول شعاع دایره با مساحت آن یا بستگی بین سرعت یک متحرک با فاصله‌ای که در زمان معینی می‌پیماید، از همان آغاز، حتا برای ریاضی‌دانان مصری، عیلامی و بابلی روشن بوده است؛ ریاضی‌دانان یونانی هم، به این بستگی‌ها توجه داشتند، ولی یونانی‌ها

این بستگی را، روی شکل‌های هندسی دنبال می‌کردند. به پیروی از آن‌ها، ریاضی‌دانان ایرانی هم، تا سدهٔ پانزدهم میلادی، پایهٔ بحث و استدلال خود را بر هندسه گذاشته بودند و، گرچه ریاضیات محاسبه‌ای، مثل جبر و مثلثات را باید ارثیهٔ ریاضی‌دانان ایرانی دانست، ولی در کُل، نتوانستند خود را از بند استدلال‌های هندسی آزاد کنند. نیوتون، ریاضی‌دان بزرگ انگلیسی هم، برای بیان بستگی دو متغیر از هندسه استفاده می‌کرد.

فرما و دکارت، ریاضی‌دانان فرانسوی از مفهوم بستگی دو متغیر استفاده کرده‌اند، ولی برای نخستین بار، لایب‌نیتس بود که واژهٔ «تابع» را، البته به صورتی محدود و نارسا، به کار برد (سال ۱۶۹۴ میلادی). اندیشهٔ لایب‌نیتس هم، بنیانی هندسی داشت و به مماس و قائم بر منحنی و پیدا کردن شعاع انحنا مربوط می‌شود.

یوهان برنولی، شاگرد برجستهٔ لایب‌نیتس، نخستین کسی بود که تابع را تعریف کرد: «تابعِ یک مقدار متغیر، به مقداری گفته می‌شود که، به ترتیبی، از این مقدار متغیر و مقدارهای ثابت، درست شده باشد» (۱۸۱۷). و لئونارد اولر، شاگرد پرکار و نابغهٔ برنولی، این تعریف را اندکی دقیق‌تر کرد: «مقدارهایی را تابع گویند که بستگی به مقدارهای دیگری داشته باشند، به نحوی که با تغییر دومی‌ها، اولی‌ها هم تغییر کنند» (۱۷۳۴).

ولی هم اولر و هم سایر ریاضی‌دانان سدهٔ هجدهم میلادی، تابع را به صورتی می‌شناختند که بتوان آن را با یک دستور مشخص نشان داد. به نظر آن‌ها $f(x) = x^۲ - \sqrt{x}$ یک تابع بود، ولی

$$f(x) = \begin{cases} -۲x & (x \leq -۱ \\ ۲ & (-۱ < x \leq ۱ \\ ۲x & (x > ۱ \end{cases}$$

را تابع به شمار نمی‌آوردند، چه رسد به زوج‌های مرتبی که، برای آن‌ها، دستوری مشخص، که بستگی بین متغیر و تابع را نشان دهد، وجود ندارد.

به‌جز این، از دیدگاه آن‌ها، با در نظر گرفتن $y = f(x)$، باید بتوان نمودار آن را در دستگاه محورهای مختصات رسم کرد.

ولی در همین سدهٔ هجدهم، با کشفی که دانیل برنولی (برادر بزرگتر یوهان) در زمینهٔ نوسان‌های سیم کرد، دشواری‌هایی برای تعریف سنتی تابع پیدا شد. به تقریب همهٔ ریاضی‌دانان بزرگ سدهٔ هجدهم، در بحث مربوط به این دشواری شرکت داشتند. این بحث، سرانجام، به آن‌جا رسید که، باید مقدار تابع را بتوان به نحوی به دست آورد و لزومی ندارد که بستگی بین متغیر و تابع، با یک دستور (فرمول) مشخص شده باشد. (این تعریف متعلق به ژان باتیست فوریه ـ۱۷۶۸ تا ۱۸۳۰ـ ریاضی‌دان فرانسوی است).

سرانجام، پتر گوستاودیریکله، ریاضی‌دانان آلمانی (۱۸۰۰ـ۱۸۵۹) حرف آخر را زد و تابع را این طور تعریف کرد:

«مقدار متغیر y را تابع مقدار متغیر x گویند، وقتی که هر مقدار x، متناظر با یک مقدار معین و منحصر به فرد y باشد».

تنها اصلاحی که در تعریف دیریکله وارد شد، این بود که، به جای «هر مقدار متغیر» بگوییم «هر مقدار متغیر که متعلق به فلان مجموعه است» ... در این صورت، به تعریفی می‌رسیم که امروز هم مورد قبول همگان است.

به این مناسبت، بد نیست، نمونهٔ تابعی را که دیریکله مثال زده است، بیاوریم:

$$f(x) = \begin{cases} ۱ & \text{وقتی } x \text{ عددی گویاست} \\ ۰ & \text{وقتی } x \text{ عددی گنگ است} \end{cases}$$

این، یک تابع است، ولی به هیچ وجه، تن به نمودار نمی‌دهد: در هر لحظه، نقطهٔ (x, y) از روی محور $x'x$ به روی خط راست $y = ۱$ می‌جهد و برعکس؛ هیچ نقطه‌ای از آن، به نقطه‌های مجاور خود پیوسته نیست.

تمرین‌ها

۶۰. از این مجموعه‌ها، کدام تابع است؟ از بین تابع‌ها، کدام، تابع وارون دارد؟

$$۱)\ A = \{(-۱, ۲),\ (۲, ۵),\ (\sqrt{۲}, ۳)\};$$
$$۲)\ B = \{(۱, -۲),\ (-۲, ۳),\ (-۱, ۴)\};$$
$$۳)\ C = \{(-۵, ۱),\ (-۳, ۲),\ (۱, ۱),\ (۰, ۳)\};$$

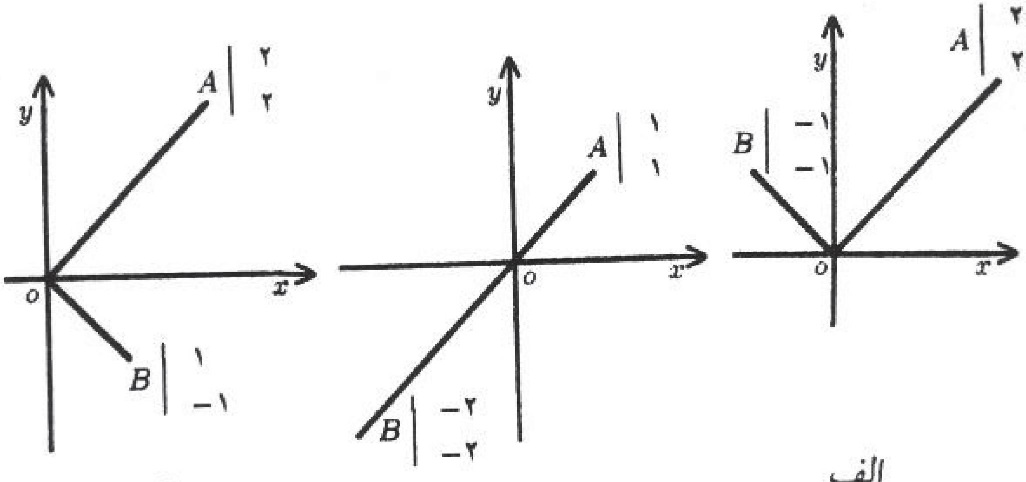
۶۱. مخروطی به ارتفاع برابر x در کره‌ای به شعاع برابر R محاط کرده‌ایم. اگر حجم این مخروط را y فرض کنیم، آیا رابطهٔ بین y و x، یک رابطهٔ تابعی است؟

۶۲. بهرام ۹۰ دقیقه را با سرعت ساعتی ۴ کیلومتر راه‌پیمایی می‌کند، بعد، ۳۰ دقیقه استراحت می‌کند و دوباره ۶۰ دقیقهٔ دیگر، با همان سرعت ساعتی ۴ کیلومتر راه می‌رود. اگر طول راهی را که بهرام پیموده است، y فرض کنیم و آن را تابعی از زمانِ x فرض کنیم، y را بر حسب x بنویسید و نمودار آن را رسم کنید (واحد زمان را ساعت و واحد طول راه را کیلومتر بگیرید).

۶۳. از این رابطه‌ها، کدام تابع است؟

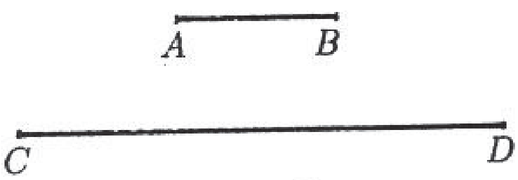
$$۱)\ y = x - \sqrt{x^۲}; \quad ۲)\ |y| = x - ۱;$$
$$۳)\ x^۲ + y^۲ = ۱; \quad ۴)\ x = y^۳;$$
$$۵)\ y = x^۲ (x \leq ۰); \quad ۶)\ x = y^۲ (y \geq ۰);$$

۶۴. الف) دایره‌ای از سه راس مثلث ABC گذرانده‌ایم. مرکز دایره در درون مثلث واقع است. مجموعهٔ نقطه‌های واقع بر محیط مثلث را X و مجموعهٔ نقطه‌های واقع بر محیط دایره را Y می‌نامیم. مرکز دایره را به هر نقطهٔ $x \in X$ وصل می‌کنیم و ادامه می‌دهیم تا محیط دایره را در نقطهٔ $y \in Y$



ج ب الف

شکل ۲۳



شکل ۲۴

قطع کند (این عمل را تصویر مرکزی نقطه‌های محیط مثلث بر محیط دایره گویند). آیا مجموعهٔ شامل زوج‌های مرتب (x, y) مُعرف یک تابع است؟ آیا با تابعی وارون پذیر سروکار داریم؟

ب) به همان پرسش‌ها، وقتی مرکز دایره در بیرون مثلث باشد، پاسخ دهید.

۶۵. کدام یک از نمودارهای شکل ۲۳، یک تابع را نشان می‌دهند؟ کدام یک، تابع وارون پذیر است؟ رابطهٔ بین x و y را در هر حالت بنویسید.

*۶۶. پاره‌خط‌های راست و موازی AB و CD $(|AB| < |CD|)$ مفروض‌اند (شکل ۲۴). مجموعهٔ نقطه‌های واقع بر پاره‌خط راست AB را X و مجموعهٔ نقطه‌های واقع بر پاره‌خط راست CD را Y می‌نامیم. چگونه می‌توان بین عضوهای $x \in X$ و عضوهای $y \in Y$ تناظر یک به یک برقرار کرد؟

۶۷. این سه تابع، چه تفاوتی با یکدیگر دارند:

$$۱)\ y=\frac{x^۲-x}{x};\ ۲)\ y=x-۱;\ ۳)\ y=\begin{cases}\dfrac{x^۲-x}{x} & (x\neq ۰)\\ -۱ & (x=۰)\end{cases}$$

*۶۸. می‌دانیم:

$$f(x)=\frac{x^۳+۲x-۴}{x^۲+x+۱}$$

مقدار $f(۳۴۵۴۷۶/۳۱۴)$ را با دقت تا یک صدهزارم تقریب پیدا کنید.

*۶۹. ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین $ABCD$ مفروض است (AB، قاعدهٔ بزرگتر و CD قاعدهٔ کوچکتر ذوزنقه است) و می‌دانیم: $|AB|=۶$، $h=۱$ (h طول ارتفاع ذوزنقه است) و هر ساق با قاعدهٔ بزرگتر زاویهٔ ۴۵ درجه می‌سازد. خط راستی موازی با ساق BC رسم کرده‌ایم تا قاعدهٔ CD یا ساق AD را در P و قاعدهٔ AB را در Q قطع کند. طول پاره‌خط راست AQ را x و مساحت بخشی از ذوزنقه را که به دو خط راست AD و PQ محدود شده است، y می‌گیریم. تابع $y=f(x)$ را مشخص و نمودار آن را رسم کنید.

۷۰. الف) آیا مجموع دو تابع زوج، تابعی زوج است؟

ب) می‌دانیم $x\in \mathbf{R}$، کدام یک از این دو تابع زوج و کدام فرد است:

$$g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{۲};\ \varphi(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{۲}$$

۷۱. زوج یا فرد بودنِ هریک از این تابع‌ها را مشخص کنید:

$$۱)\ f(x) = \frac{۱}{|x| - ۲};\quad ۲)\ f(x) = ۲\text{tg}x - \frac{۱}{\sin x};$$
$$۳)\ f(x) = \frac{\cot x}{x^۲ + x};\quad ۴)\ f(x) = ۲x^۴ - \cos x;$$
$$۵)\ f(x) = \frac{۲x - ۳}{x + ۱};\quad ۶)\ f(x) = x^۳ - \frac{۱}{x};$$

*۷۲. نفتالین در حرارت ۸۰ درجه آغاز به گداختن می‌کند. نفتالین جامد را، که حرارت ۵۵ درجه دارد، گرما می‌دهیم، بعد از ۵ دقیقه، حرارت آن به ۸۰ درجه می‌رسد و آغاز به ذوب شدن می‌کند. ۴ دقیقه طول می‌کشد تا همهٔ نفتالین گداخته شود. آزمایش را در لحظه‌ای قطع می‌کنیم که درجهٔ حرارت نفتالین گداخته به ۹۰ برسد. اگر زمان را، بر حسب دقیقه با x و درجهٔ حرارت نفتالین را با y نشان دهیم، تابع $y = f(x)$ را مشخص و نمودار آن را رسم کنید.

۷۳. اگر $f(x) = \frac{|x|}{x + ۱}$، مطلوب است:

$$۱) f(۲);\ ۲) f(-۲);\ ۳) f(۰);\ ۴) f(-\frac{۳}{۴});$$
$$۵) f(x^۲);\ ۶) f(-x);\ ۷) f(|x|);\ ۸) f(۳x);$$
$$۹) f(x^۲ + ۱);\ ۱۰) f(x^۲ - ۱);\ ۱۱) f(\frac{۱}{x});\ ۱۲) f(f(x))$$

*۷۴. برای تابع‌های $f(x)$ و $g(x)$ که به صورت چندجمله‌ای هستند می‌دانیم، برای هر عدد حقیقی x، این برابری برقرار است:

$$f(x^۲ - x + ۱) = g(x^۲ + x + ۱)$$

ثابت کنید، f و g، دو تابع ثابت‌اند.

*۷۵. برای مقدارهای حقیقی x می‌دانیم:

$$ff(x) = (x^۲ - ۳x + ۱)(x^۲ - ۲x - ۲) + ۱$$

مطلوب است $f(x)$.

۷۶. اگر $f(\frac{x}{x+۲}) = x^۲ - x$، مطلوب است $f(x)$.

۷۷. $f(x)$ تابعی است خطی و می‌دانیم $f(-۱) = ۲$ و $f(۰) = ۵$.
مطلوب است $f(x)$.

۷۸. می‌دانیم $f(x + \frac{۱}{x}) = x^۳ + \frac{۱}{x^۳}$. مطلوب است $f(x)$.

۷۹. برای $a > ۰$ می‌دانیم: $\varphi(x) = \frac{a^x + a^{-x}}{۲}$ ثابت کنید:

$$\varphi(x+y) + \varphi(x-y) = ۲\varphi(x)\varphi(y)$$

۸۰. می‌دانیم:

$$۲f(x-۱) + f(۱-x) = ۳x$$

مطلوب است $f(x)$.

۸۱. $f(x)$ یک چندجمله‌ای است. ثابت کنید، معادله به صورت $f(x) = f(۲)$، دست‌کم یک ریشه دارد.

۸۲. برای $x > ۰$ می‌دانیم $f(\frac{y}{x}) = \frac{\sqrt{x^۲ + y^۲}}{x}$. مطلوب است $f(x)$.

۸۳. $f(x)$ را پیدا کنید، به شرطی که بدانیم:

$$۲f(۲+x) + ۳f(۲-x) = ۸۵ - ۵x$$

*۸۴. معادلهٔ محور تقارن نمودار تابع $y = x^۲ - ۲x$ را پیدا کنید.

*۸۵. مطلوب است مختصات مرکز تقارن نمودار تابع‌های

$$۱)\ y = x^۳ - ۳x^۲; \quad ۲)\ y = \frac{x-۱}{x+۱}$$

۴. دایره و سهمی

§۱. دایره

۱. **زیباترین شکل از شکل‌های روی صفحه.** اندیشمندان یونان باستان، به پیروی از اندیشمندان بابلی (در سرزمین «میان دو رود»)، عیلامی (در جنوب و جنوب غربی ایران) و مصری (در شمال افریقا)، و به‌ویژه افلاطون اندیشمند یونانی، زیبایی را در «تقارن» می‌دانستند. به این ترتیب، دایره، که متقارن‌ترینِ شکل‌هاست، زیباترین شکل در هندسه روی صفحه شمرده می‌شد.

ظرف‌های گلی و سفالی و چوبی (مثل کاسه و کوزه)، که از کهن‌ترین دوران تاریخ بشر به ما رسیده است، گرد ساخته شده‌اند، چرا که گِردی، هم زیباتر است و هم ساده‌تر به دست می‌آید ... و این شکل ساخت ظرف، تا امروز هم، چیرگی خود را بر سایر شکل‌ها حفظ کرده است. چرخ درشکه و اتومبیل باید دایره‌ای باشد و، شکل دیگری برای چرخ، به سختی به تصور می‌آید. میخ، پیچ، چرخ دنده و حتا گنبدها و نمای پیش‌خوان‌های ساختمان‌های قدیمی، همه گرد و دایره‌ای شکل‌اند. خورشید و ماه کامل و ستارگان، در شکل ظاهری خود، یک دایرهٔ کامل‌اند.

از این جالب‌تر، و شاید عجیب‌تر، اگر در دشتی صاف و گسترده بایستید، جهتی را نشان کنید، بعد چشمهایتان را ببندید و، به همان سمتی که نشان کرده‌اید، مدتی دراز حرکت کنید و، ضمن حرکت اثری در مسیر خود (مثلاً با گچ سفید) باقی بگذارید، به شرطی که حوصله داشته باشید و دست کم ۸ تا ۱۰ ساعت راه‌پیمایی کنید؛ وقتی چشمان خود را باز کنید، با شگفتی متوجه می‌شوید که، روی محیط یک دایره حرکت کرده‌اید. وقتی با چشم باز به سمتی حرکت می‌کنید، دید شما، به طور مرتب مسیر حرکت شما را تصحیح می‌کند و روی خط راست نگه می‌دارد.

«دایره» واژه‌ای عربی است، ولی از واژهٔ فارسی «دُور» آمده است و هنوز، بسیاری از مردم ما، بشقاب را، «دُوری» می‌نامند.

□

دایره، تعریفی بسیار ساده دارد و، با معلوم بودن مرکز و طول شعاع آن، مشخص می‌شود. به همین مناسبت، می‌گویند: دایره به دو عامل (یا دو پارامتر) بستگی دارد. با پرگار می‌توان دایره را رسم کرد، زیرا نوک پرگار، مرکز و اندازهٔ دهنهٔ پرگار، طول شعاع آن را معین می‌کند.

دایره، با همهٔ سادگی خود، ویژگی‌های بسیار دارد و مساله‌ها و قضیه‌های مربوط به دایره (چه در هندسهٔ خالص و چه در «هندسهٔ تحلیلی») پایانی ندارند. بنابراین، آشنا شدن با ویژگی‌های نخستینِ دایره، اهمیتی جدی پیدا می‌کند و می‌تواند راه‌گشای ما، در حل بسیاری از مساله‌های دیگر باشد.

۲. معادلهٔ دایره. فرض کنید $\omega(\alpha, \beta)$ مرکز و R، طول شعاع دایره باشد. اگر $M(x, y)$ را، نقطهٔ دلخواهی از محیط دایره بگیریم، باید داشته باشیم: $|\omega M|^2 = R^2$ و یا

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2 \qquad (1)$$

به این ترتیب، اگر مختصات مرکز و طول شعاع دایره را، در اختیار داشته باشیم، به یاری برابری (۱)، می‌توانیم معادلهٔ دایره را بنویسیم. این معادله را، به صورت

$$f(x,y) = (x-\alpha)^{۲} + (y-\beta)^{۲} - R^{۲} = ۰$$

هم می‌توان نوشت. توجه کنید: *معادلهٔ دایره، تابع نیست*. در ضمن، وقتی از معادلهٔ دایره صحبت می‌کنیم، منظور معادلهٔ محیط دایره است.

مثال ۱. *معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که، مرکز آن، روی خط راست $x+y=۲$ و به عرض $y=-۱$ باشد و بر محور $x'x$ مماس شود.*

حل. چون عرض نقطهٔ ω مرکز دایره، در اختیار است و می‌دانیم، این مرکز، روی خط راست $x+y=۲$ قرار دارد، با قرار دادن $y=-۱$ در معادلهٔ خط راست، طول نقطهٔ ω (مرکز دایره) به دست می‌آید:

$$x-۱=۲ \Rightarrow x=۳;\ \omega(۳,-۱)$$

محور $x'x$ بر دایره مماس است. اگر نقطه $T(a,۰)$ را نقطهٔ تماس بگیریم، طول $R=|\omega T|$ برابر فاصلهٔ $\omega(۳,-۱)$ از خط راست $y=۰$ (محور $x'x$) است. بنابراین، طول شعاع دایره، برابر است با قدر مطلق عرض نقطهٔ ω (چرا؟): $R=۱$؛ و معادلهٔ دایره، چنین می‌شود:

$$(x-۳)^{۲}+(y+۱)^{۲}=۱ \Rightarrow x^{۲}+y^{۲}-۶x+۲y+۹=۰$$

مثال ۲. *معادلهٔ دایره‌ای، به این صورت داده شده است:*

$$x^{۲}+y^{۲}-۶x-۲y+۶=۰$$

الف) مختصات مرکز و طول شعاع این دایره را پیدا کنید.

*ب) از نقطهٔ $M(-۱,-۱)$ دو مماس بر این دایره رسم کرده‌ایم. اگر نقطه‌های تماس را $T_۱$ و $T_۲$ بنامیم، معادلهٔ هریک از ضلع‌های مثلث $MT_۱T_۲$ را پیدا کنید.

حل. الف) معادلهٔ دایره را می‌توان این طور نوشت:

$$(x-۳)^۲+(y-۱)^۲=۴$$

و بنابراین، اگر مرکز دایره را C و طول شعاع آن را R بنامیم، داریم:

$$C(۳,۱) \text{ و } R=۲$$

ب) از هندسه می‌دانیم، اگر دایره‌ای به قطر پاره‌خط راست MC رسم کنیم، در نقطه‌های $T_۱$ و $T_۲$، دایرهٔ مفروض را قطع می‌کند. مرکز دایرهٔ به قطر پاره‌خط راست MC، در وسط دو نقطهٔ M و C، یعنی در نقطهٔ $C'(۱,۰)$ قرار دارد و طول شعاع این دایره، برابر است با نصف طول پاره‌خط راست MC؛ پس

$$R'=\frac{۱}{۲}|MC|=\frac{۱}{۲}\sqrt{(۳+۱)^۲+(۱+۱)^۲}=\sqrt{۵}$$

با در دست داشتن مختصات مرکز و طول شعاع، می‌توان معادلهٔ دایره را نوشت:

$$(x-۱)^۲+y^۲=۵ \Rightarrow x^۲+y^۲-۲x-۴=۰$$

برای به دست آوردن مختصات نقطه‌های $T_۱$ و $T_۲$ (نقطه‌های تماس)، باید دستگاه شامل دو معادلهٔ دو دایره را با هم حل کرد (دایره‌ها را به نام مرکز آن‌ها می‌خوانیم):

$$(C): \quad x^۲+y^۲-۶x-۲y+۶=۰$$
$$(C'): \quad x^۲+y^۲-۲x-۴=۰$$

که اگر معادلهٔ اول را از معادلهٔ دوم کم کنیم، به دست می‌آید:

$$۴x + ۲y - ۱۰ = ۰ \Rightarrow ۲x + y - ۵ = ۰$$

و همین معادلهٔ $۲x + y - ۵ = ۰$، معادلهٔ خط راستی است که از $T_۱$ و $T_۲$ می‌گذرد. در واقع مختصات نقطه‌های $T_۱$ و $T_۲$، باید در معادله‌های (C) و (C') و، در نتیجه، در معادله‌ای که از تفاضل آن‌ها به دست می‌آید، صدق کند. تفاضل این‌دو معادله، یک معادلهٔ خطی، یعنی معادلهٔ یک خط راست است و، چون مختصات $T_۱$ و $T_۲$ در آن صدق می‌کند، بنابراین معادلهٔ خط راستی است که از این دو نقطه می‌گذرد (از دو نقطهٔ مختلف، تنها یک خط راست می‌گذرد). معادلهٔ ضلع $T_۱T_۲$ از مثلث $MT_۱T_۲$ پیدا شد:

$$(T_۱T_۲): \qquad ۲x + y - ۵ = ۰$$

اگر از معادلهٔ $T_۱T_۲$، مقدار y را، بر حسب x، پیدا کنیم و مثلاً در معادلهٔ دایره (C') بگذاریم، طول‌های نقطه‌های تماس به دست می‌آید:

$$۲x + y - ۵ = ۰ \Rightarrow y = ۵ - ۲x;$$
$$\begin{cases} y = ۵ - ۲x \\ x^۲ + y^۲ - ۲x - ۴ = ۰ \end{cases} \Rightarrow (۵ - ۲x)^۲ + x^۲ - ۲x - ۴ = ۰$$

که از آن‌جا، به معادلهٔ درجه دوم $۵x^۲ - ۲۲x + ۲۱ = ۰$ می‌رسیم که دو ریشه دارد: ۳ و $\frac{۷}{۵}$. با قرار دادن مقدارهای x در معادلهٔ اول دستگاه، مقدارهای y هم به دست می‌آید:

$$T_۱(۳, -۱) \text{ و } T_۲\left(\frac{۷}{۵}, \frac{۱۱}{۵}\right)$$

اکنون معادله‌های خط‌های راست $MT_۱$ و $MT_۲$ به سادگی به دست می‌آیند.

پاسخ. $2x + y - 5 = 0$ (T_1T_2)؛ $y = -1$ (ضلع MT_1)؛ $4x - 3y + 1 = 0$ (ضلع MT_2).

مثال ۳. نقطه‌های $A(2, -5)$، $B(-6, -1)$ و $C(3, -2)$ داده شده‌اند. *معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که از سه نقطهٔ A، B و C می‌گذرد.*

حل. *راه حل اول.* معادلهٔ دایره‌ای را که از سه نقطهٔ A و B و C می‌گذرد، به صورت کلی در نظر می‌گیریم:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$$

باید مختصات سه نقطهٔ مفروض، در این معادله صدق کنند. در نتیجه، به این سه معادله می‌رسیم:

$$\begin{cases} (2 - \alpha)^2 + (-5 - \beta)^2 = R^2 \\ (-6 - \alpha)^2 + (-1 - \beta)^2 = R^2 \\ (3 - \alpha)^2 + (2 - \beta)^2 = R^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 - 4\alpha + 10\beta + 29 = R^2 \\ \alpha^2 + \beta^2 + 12\alpha + 2\beta + 37 = R^2 \\ \alpha^2 + \beta^2 - 6\alpha - 4\beta + 13 = R^2 \end{cases}$$

اکنون، اگر معادلهٔ اول را از معادلهٔ دوم و معادلهٔ سوم را از معادلهٔ دوم کم کنیم، به این دستگاه دو معادلهٔ خطی دومجهولی (با مجهول‌های α و β) می‌رسیم:

$$\begin{cases} 2\alpha - \beta + 1 = 0 \\ 3\alpha + \beta + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \omega \left| \begin{array}{l} -1 \\ -1 \end{array} \right.$$

با قرار دادن $\alpha = -1$ و $\beta = -1$ در یکی از سه معادلهٔ دستگاه قبلی (که شامل R است)، مقدار R به دست می‌آید: $R = 5$؛ و معادلهٔ دایرهٔ مورد نظر، چنین می‌شود:

$$(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 25 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2x + 2y = 23$$

راه حل دوم. دایره‌ای که از سه نقطهٔ A و B و C بگذرد، همان دایرهٔ محیطی مثلث ABC است. مرکز دایرهٔ محیطی هر مثلث، در نقطهٔ برخورد عمود منصف‌های سه ضلع مثلث قرار دارد. کافی است، معادلهٔ دو عمود منصف را به دست آوریم؛ مرکز دایره در نقطهٔ برخورد این دو عمود منصف است.

عمود منصف ضلع AB، از نقطهٔ $C'(-۲, -۳)$ (وسط پاره‌خط راست AB) می‌گذرد و ضریب زاویه‌ای برابر عکس قرینهٔ ضریب زاویهٔ خط راست AB دارد. ضریب زاویهٔ خط راست AB برابر $-\frac{۱}{۲}$ و بنابراین ضریب زاویهٔ عمود منصف ضلع AB برابر ۲ می‌شود. معادلهٔ عمود منصف ضلع AB به صورت

$$(C'\omega),\ ۲x - y + ۱ = ۰$$

درمی‌آید. به همین ترتیب، می‌توان معادلهٔ عمود منصف ضلع AC را به دست آورد (نقطهٔ $B'\left(\frac{۵}{۲}, -\frac{۳}{۲}\right)$ وسط ضلع AC و ضریب زاویهٔ خط راست AC برابر ۷ است):

$$(B'\omega):\quad x + ۷y + ۸ = ۰$$

ω، مرکز دایره، نقطهٔ برخورد دو خط راست $C'\omega$ و $B'\omega$ است:

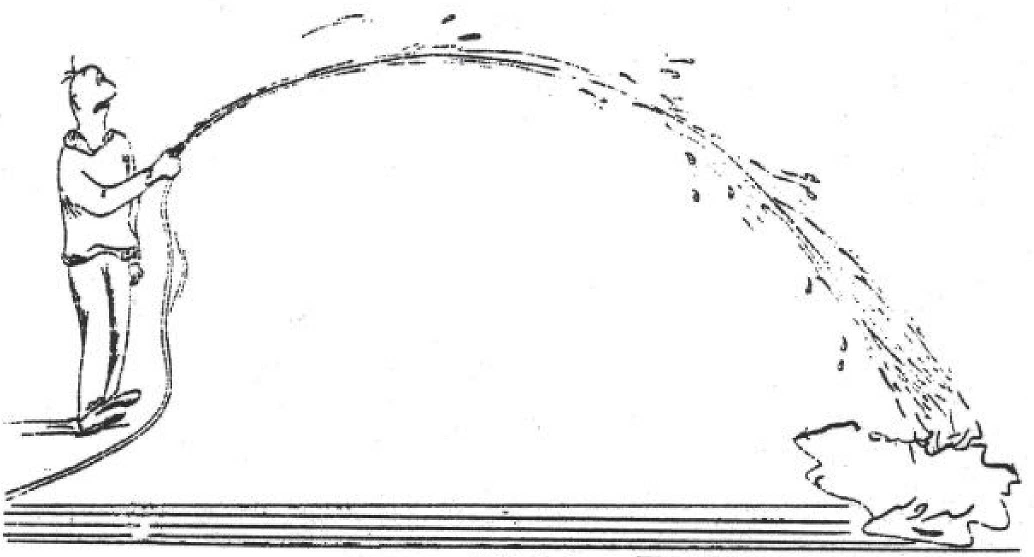
$$\begin{cases} ۲x - y + ۱ = ۰ \\ x + ۷y + ۸ = ۰ \end{cases} \Rightarrow \omega \left| \begin{array}{l} -۱ \\ -۱ \end{array} \right.$$

فاصلهٔ ω تا یکی از راس‌ها، و مثلاً A، مقدار شعاع دایره را معین می‌کند:

$$|\omega A| = \sqrt{(۲+۱)^۲ + (-۵+۱)^۲} = ۵$$

و بنابراین، با در دست داشتن مرکز و طول شعاع دایره، معادلهٔ دایره به دست می‌آید:

$$(x+۱)^۲ + (y+۱)^۲ = ۲۵$$

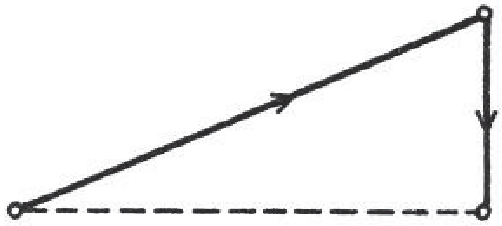


شکل ۲۵

§۲. سهمی

۱. **سهمی چگونه شکلی است؟** به شکل ۲۵ توجه کنید. اگر فشار آب به اندازهٔ کافی باشد و اگر از مقاومتی که هوا در برابر حرکت آب ایجاد می‌کند، صرف نظر کنیم، مسیر حرکت آب در هوا، به شکل سهمی خواهد بود. سنگی که به هوا پرتاب شود (به شرطی که این پرتاب، موازی سطح زمین و یا عمود بر آن نباشد)، گلوله‌ای که از تفنگ یا توپ خارج می‌شود، آبی که از یک فوارهٔ مایل فوران می‌کند، ضمن حرکت خود، مسیری را می‌پیمایند که **سهمی**، یا به قول نویسندگان ایرانی سدهٔ پیش، **شلجمی** نام دارد. که، در زبان‌های لاتینی، به آن «پارابُل» گویند.

قانون و مسیر حرکت جسمی که پرتاب می‌شود، خیلی زود شناخته نشد. ارسطو گمان می‌کرد، مسیر حرکت این جسم، در آغاز مستقیم است و بعد از رسیدن به نقطهٔ اوج خود، به طور قائم فرود می‌آید (شکل ۲۶). ریشهٔ اصلی



شکل ۲۶

این اشتباه، در این‌جا بود که ارسطو گمان می‌کرد، اگر دو جسم را از یک بلندی به طرف زمین رها کنیم، آن که سنگین‌تر است، زودتر به زمین می‌رسد. این گمان نادرست در تمامی دوران سده‌های میانه، مورد قبول بود و، به دلیل آموزش‌ها و اعتقادهای نادرست این دوران، کسی شجاعت یک آزمایش ساده را در این باره پیدا نکرد، چرا که هم، مشاهده و تجربه را قبول نداشتند (و آن را دخالتِ در طبیعت و کاری ناپسند می‌شمردند) و هم مخالفت با آموزش‌های ارسطو را، که استاد اول نام داشت، مجاز نمی‌دانستند.

نخستین دانشمندی که، نزدیک به هزار سال پیش، این شیوهٔ برخورد با دانش را رد کرد، ابوریحان بیرونی بود. او اعتقاد داشت که، باید محصول ذهن و اندیشه را (حتا اگر با استدلال ریاضی و یا استدلال منطقی به دست آمده باشد)، در صحنهٔ عمل به آزمایش گذاشت و تنها وقتی آن را پذیرفت که، درستی آن، با تجربه تایید شود. ولی در اروپای غربی، در دوران تاریک سده‌های میانه، چنین نبود و شاید برای شما جالب باشد که، بیش از ۵۰۰ سال بعد از ابوریحان بیرونی، ریاضی‌دان بزرگی چون کاردان (۱۵۰۱ـ۱۵۷۶ میلادی) که در ایتالیای دوران نوزایی (رُنسانس) می‌زیست، اعتقادی به تجربه نداشت.

در سده‌های سیزدهم و چهاردهم میلادی، چنان دشمنی با مشاهده و تجربه داشتند که وقتی راجربیکون انگلیسی (۱۲۱۴ـ۱۲۹۴ میلادی)، مشاهده و تجربه را، برای شناخت قانون‌های حاکم بر طبیعت ضروری دانست و خود

در زمینه‌هایی، و از جمله ویژگی‌های نور، به آزمایش پرداخت، او را به اتهام جادوگری دستگیر کردند و به زندان انداختند که تنها در سال‌های پایانی عمر و در دوران سال‌خوردگی خود، توانست از زندان نجات پیدا کند.

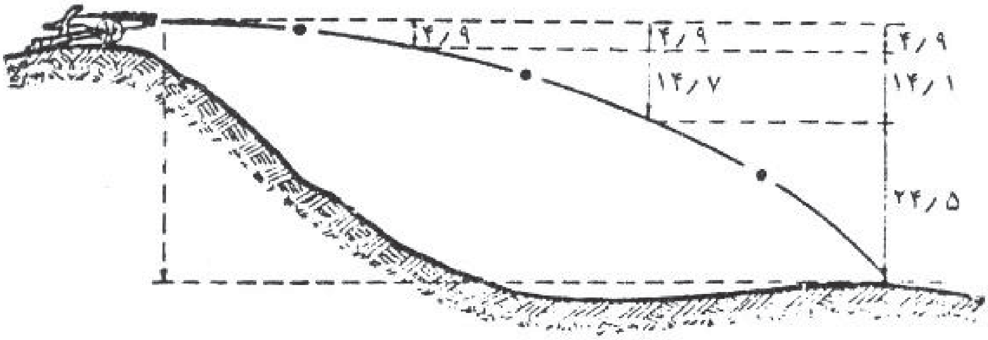
ولی حقیقت، نمی‌تواند همیشه پنهان بماند؛ نیازهای زندگی، عمل‌کرد قانون‌های حاکم بر طبیعت و پیشرفت صنعت، آدمی را، هر قدر کج‌اندیش و ذهن‌گرا باشد، وامی‌دارد تا به حقیقت تسلیم شود.

در سال‌های سی سدهٔ سیزدهم میلادی، اسلحهٔ گرم و، سپس، توپ ساخته شد و در جنگ‌ها مورد استفاده قرار گرفت. ولی گلوله به هدف نمی‌خورد. بنابر آموزش ارسطو، درست به سمت هدف، نشانه‌گیری می‌کردند، ولی گلوله به جای دیگری برخورد می‌کرد.

لئوناردو داوینچی (۱۴۵۲_۱۵۱۵ میلادی) هنرمند و دانشمند ایتالیایی، که زمانی به عنوان مهندس توپچی، به دوک میلان خدمت می‌کرد، خیلی زود درک کرد که، تنها تصور و حتا اندیشیدن نمی‌تواند موجب کشف قانون‌های طبیعت باشد و تاکید می‌کرد: «در آن‌جا که نمی‌توانید از دانش ریاضی استفاده کنید و در آن‌جا که نمی‌توانید رابطه‌ای با عدد برقرار کنید، نباید به درستی کار خود اطمینان داشته باشید».

تارتاگلیا (۱۵۰۹_۱۵۵۹ میلادی)، ریاضی‌دان فقیرزادهٔ ایتالیایی، در برابر پرسش یک توپچی که از او پرسیده بود: «با چه زاویه‌ای، گلولهٔ توپ را پرتاب کنیم تا بیشترین فاصله را بپیماید؟»، پس از آزمایش و محاسبه، پاسخ داد: «با زاویهٔ ۴۵ درجه». تارتاگلیا، همین قدر متوجه شد که مسیر حرکت گلولهٔ توپ، روی یک منحنی است، ولی به ویژگی‌های این منحنی نرسید.

مسیر پرواز گلوله را سرانجام، گالیله پیدا کرد و ویژگی‌های آن را توضیح داد. وقتی گلوله‌ای از لولهٔ توپ خارج می‌شود، زیر اثر دو نیرو قرار می‌گیرد، یکی نیرویی که از طرف توپ بر آن وارد آمده و آن را به مسیری روی یک خط راست هدایت می‌کند و دیگری نیروی کشش زمین که آن را به سمت پایین



شکل ۲۷

می‌کشاند. ترکیب این دو نیرو موجب می‌شود هر گلوله روی مسیری منحنی، به نام سهمی حرکت کند (شکل ۲۷)

۲. معادله سهمی و ویژگی‌های آن. شما سهمی را می‌شناسید. نمودار تابع

$$y = ax^{۲} + bx + c \; (a \neq ۰) \qquad (۱)$$

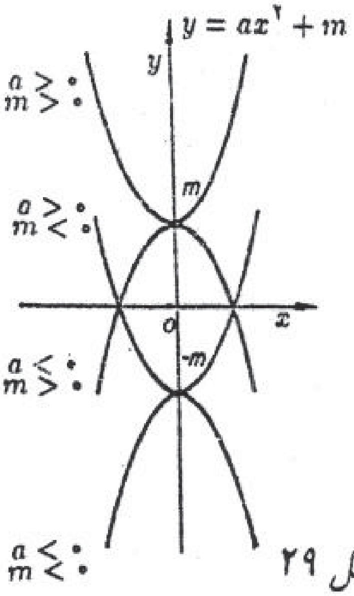
یک سهمی را معرفی می‌کند؛ و می‌دانید، اگر این تابع را به صورت

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{۲a}\right)^{۲} + \frac{۴ac - b^{۲}}{۴a^{۲}}\right]$$

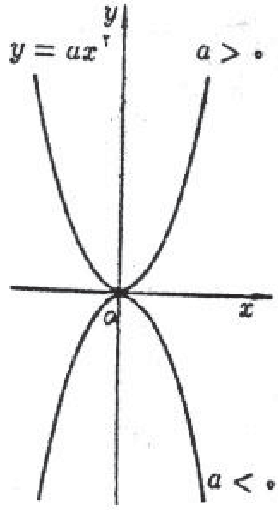
بنویسیم، نقطهٔ $S\left(-\frac{b}{۲a}, \frac{۴ac - b^{۲}}{۴a}\right)$، برای $a > ۰$، پایین‌ترین نقطهٔ نمودار و، به‌ازای $a < ۰$، بالاترین نقطهٔ نمودار است. نقطهٔ S را **راس سهمی** گویند. در این‌جا، راس سهمی، معرف می‌نیمم (برای $a > ۰$) و ماکزیمم (برای $a < ۰$) است.

همچنین، خط راست $x = -\frac{b}{۲a}$ (که از راس سهمی، موازی محور $y'y$ رسم شود)، محور تقارن یا به طور ساده **محور سهمی** است.

در واقع، اگر دستگاه محورهای مختصات را، طوری انتخاب کنیم که، محور سهمی، موازی با محور عرض باشد، معادلهٔ سهمی به صورت تابع



شکل ۲۹



شکل ۲۸

(۱) درمی‌آید و روشن است که، اگر محور سهمی، موازی محور طول باشد، معادله‌ای به صورت

$$x = ay^۲ + by + c \ (a \neq ۰)$$

پیدا می‌کند که، البته، یک تابع نیست.

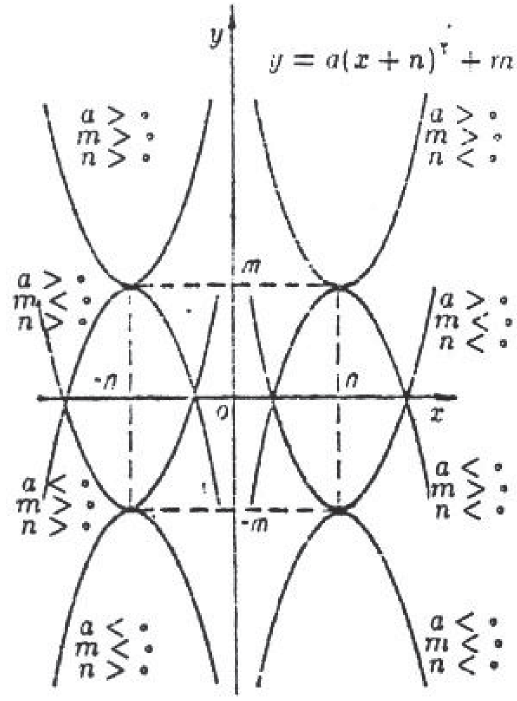
اگر عرض راس سهمی برابر صفر باشد، یعنی اگر $b^۲ - ۴ac = ۰$، آن وقت راس سهمی روی محور $x'x$ می‌افتد و خود سهمی بر این محور مماس می‌شود.

نمودار سهمی $y = ax^۲ + bx + c$ $(a \neq ۰)$ را در حالت‌های مختلف، روی شکل‌های ۲۸ تا ۳۱ می‌بینید. در این نمودارها، برای سادگی بیشتر، معادله را به صورت $y = a(x+n)^۲ + m$ گرفته‌ایم، یعنی فرض کرده‌ایم:

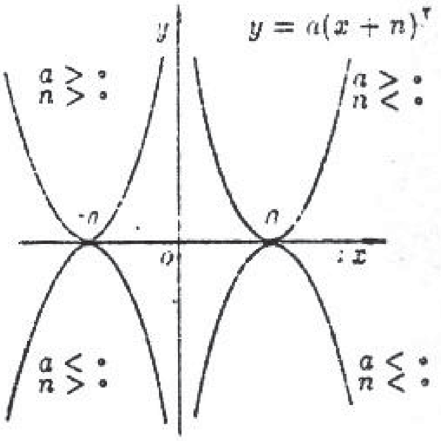
$$n = \frac{b}{۲a}, \ m = \frac{۴ac - b^۲}{۴a}$$

مثال ۴. *معادلهٔ وتر مشترک سهمی‌هایی را پیدا کنید که معادلهٔ آن‌ها، به این صورت باشند.*

$$y = ۲x^۲ - ۸x, \ y = x^۲ - ۶x + ۳$$



شکل ۳۱



شکل ۳۰

حل. وتر سهمی، یعنی پاره‌خط راستی که دو نقطهٔ آن را به هم وصل کرده باشد. دو سهمی، وقتی وتر مشترک دارند که یکدیگر را در دو نقطهٔ مختلف قطع کنند. در این صورت، پاره‌خط راستی که این دو نقطهٔ برخورد را به هم می‌پیوندد، وتر مشترک دو سهمی است.

برای پیدا کردن مختصات نقطه‌های برخورد دو سهمی، معادله‌های آن‌ها را در دستگاه (شامل دو معادلهٔ دومجهولی) قرار می‌دهیم که منجر به حل معادلهٔ

$$۲x^۲-۸x=x^۲-۶x+۳$$

می‌شود که طول‌های نقطه‌های برخورد را به ما می‌دهد: ۱ −، ۳. با قرار دادن این مقدارها، در یکی از معادله‌های دو سهمی، عرض‌های نقطه‌های برخورد به دست می‌آید: ۱۰ و ۶−. بنابراین، اگر نقطه‌های برخورد را A و B

بنامیم، داریم:

$$A(-۱, ۱۰),\ B(۳, -۶)$$

که از آن‌جا، معادلهٔ خط راست AB به دست می‌آید:

$$۴x + y - ۶ = ۰ \qquad (*)$$

پاره‌خطی از خط راست $(*)$، که بین دو نقطهٔ A و B قرار دارد، وتر مشترک دو سهمی است (خودتان شکل‌ها را رسم کنید).

یادداشت. اگر می‌خواستیم معادلهٔ خط راستی را پیدا کنیم که از دو نقطهٔ برخورد سهمی‌ها می‌گذرد (و به مختصات نقطه‌های برخورد A و B نیازی نداشتیم)، با سادگی بیشتری می‌توانستیم به نتیجه برسیم، در معادله‌های

$$y = ۲x^۲ - ۸x,\ y = x^۲ - ۶x + ۳$$

اگر جملهٔ درجه دوم را حذف کنیم، به معادلهٔ خط راست AB می‌رسیم (بگویید چرا؟). برای این منظور، معادله اول را از دو برابر معادله دوم کم می‌کنیم، به دست می‌آید.

$$y = -۴x + ۶ \Rightarrow ۴x + y - ۶ = ۰$$

ولی توجه کنید، از این روش، تنها وقتی می‌توان استفاده کرد که از وجود نقطه‌های برخورد دو سهمی، اطمینان داشته باشیم. سهمی‌های با معادله‌های

$$y = x^۲ + ۱,\ y = -x^۲ + ۲x - ۳$$

را در نظر بگیرید. این دو سهمی، نقطه برخورد ندارند، زیرا، برای پیدا کردن نقطه‌های برخورد دو سهمی، به معادلهٔ درجه دوم

$$x^۲ - x + ۲ = ۰$$

می‌رسیم که ریشهٔ حقیقی ندارد؛ بنابراین، سهمی‌ها، وتر مشترک ندارند. ولی اگر معادله‌های دو سهمی را با هم جمع کنیم، به معادلهٔ

$$x - y = ۱$$

می‌رسیم که معادلهٔ یک خط راست است، ولی وتر مشترک دو سهمی نیست. سهمی‌ها یکدیگر را قطع نمی‌کنند؛ این خط راست هم هیچ‌کدام از دو سهمی را قطع نمی‌کند.

دربارهٔ پیدا کردن معادلهٔ وتر مشترک دو دایره هم، اگر از این روش استفاده شود، باید همین نکته در نظر گرفته شود، یعنی در آغاز اطمینان پیدا کنیم، دو دایره یکدیگر را قطع می‌کنند (یعنی مطمئن شویم، دو دایره، وتر مشترک دارند)؛ سپس با حذف جمله‌های درجه دوم، بین دو معادله، خود را به معادله خط راستی برسانیم که از نقطه‌های برخورد دو دایره می‌گذرد.

مثال ۵. *سهمی، محوری موازی محور $y'y$ دارد و در نقطهٔ $S(۲, ۲)$، بر خط راست $y = ۲$ مماس است. اگر بدانیم، این سهمی، محور $y'y$ را در نقطه‌ای به عرض برابر ۲− قطع می‌کند، معادلهٔ آن را پیدا و سپس نمودار آن را رسم کنید.*

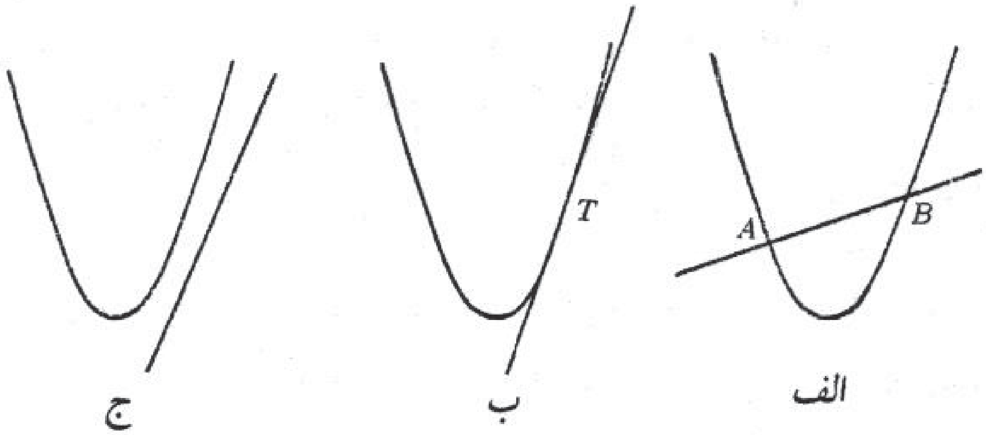
حل. چون سهمی، محوری موازی محور عرض دارد، معادله‌اش به صورت:

$$y = ax^۲ + bx + c$$

است. وقتی سهمی محور عرض را در نقطهٔ به عرض ۲− قطع می‌کند، به معنای آن است که از نقطهٔ $M(۰, -۲)$ می‌گذرد. بنابراین، مختصات نقطهٔ M، باید در معادلهٔ سهمی صدق کند:

$$-۲ = ۰a + ۰b + c \Rightarrow c = -۲$$

و معادلهٔ سهمی به صورت $y = ax^۲ + bx - ۲$ درمی‌آید.



شکل ۳۲

سهمی از نقطهٔ $S(۲, ۲)$، راس سهمی هم می‌گذرد.

$$۲ = ۴a + ۲b - ۲ \Rightarrow b = -۲a + ۲$$

درضمن می‌دانیم، طول راس سهمی (یعنی طول نقطهٔ S) برابر $-\frac{b}{۲a}$ است:

$$-\frac{b}{۲a} = ۲ \Rightarrow b = -۴a$$

با برابر قرار دادن دو مقداری که برای b به دست آمده‌است، مقدار a پیدا می‌شود.

$$-۲a + ۲ = -۴a \Rightarrow a = -۱$$

و از آن‌جا: $b = -۲a + ۲ = ۴$.

پاسخ. $y = -x^۲ + ۴x - ۲$ (نمودار را خودتان رسم کنید).

۳. خط راست و سهمی. خط راست و سهمی، نسبت به هم، سه حالت پیدا می‌کنند.

الف) خط راست، سهمی را در دو نقطهٔ A و B قطع کرده است (شکل ۳۲_الف). بنابراین، اگر معادله‌های خط راست و سهمی را، در دستگاهی شامل دو معادلهٔ دو مجهولی قرار دهیم، باید دو جواب برای دستگاه به دست

آید. در واقع، اگر معادلهٔ سهمی را $y = f(x)$ و معادلهٔ خط راست را $y = g(x)$ بگیریم، باید معادلهٔ $f(x) = g(x)$ (که یک معادله درجه دوم است) دارای دو ریشهٔ حقیقی مختلف باشد (یعنی مبیّن آن، مثبت شود).

ب) خط راست، در نقطه‌ای مثل T، بر سهمی مماس است. در این حالت، خط راست و سهمی، تنها یک نقطهٔ مشترک دارند و این، به معنای آن است که معادله درجه دوم $f(x) = g(x)$ یک جواب، یعنی دو ریشه برابر (یا یک ریشهٔ مضاعف) داشته باشد (شکل ۳۲ـب).

ج) خط راست و سهمی نقطهٔ مشترکی ندارند. روشن است که، در این حالت، معادلهٔ درجه دوم $f(x) = g(x)$ ریشهٔ حقیقی ندارد (یعنی مبین آن، مقداری منفی است) شکل ۳۲ـج.

□

دربارهٔ نقطه‌های مشترک دو سهمی و یا به طور کلی دو نمودار، می‌توان همین نتیجه‌ها را به دست آورد. همیشه به یاد داشته باشید: ضمن حل معادله‌های دو نمودار، هر وقت به ریشهٔ مضاعف برخورد کردید، به معنای این است که دو نمودار بر هم مماس‌اند.

مثال ۶. *موقعیت خط راست $y = x + ۱$ را، با هریک از سهمی‌های زیر مشخص کنید.*

$$۱)\ y = x^۲ + x - ۳; \qquad ۲)\ y = x^۲ - ۳x + ۵;$$
$$۳)\ y = ۳x^۲ + ۲x + ۲; \quad ۴)\ y = x^۲ + ۳x + m$$

حل. ۱) دستگاه شامل معادله‌های خط راست و سهمی چنین است:

$$\begin{cases} y = x^۲ + x - ۳ \\ y = x + ۱ \end{cases} \Rightarrow x^۲ - ۴ = ۰ \Rightarrow x = \pm ۲$$

خط راست، سهمی را در دو نقطهٔ $A(-۲, -۱)$ و $B(۲, ۳)$ قطع می‌کند.

۲) باید این دستگاه را حل کنیم:

$$\begin{cases} y = x^۲ - ۳x + ۵ \\ y = x + ۱ \end{cases} \Rightarrow x^۲ - ۴x + ۴ = ۰ \Rightarrow x_۱ = x_۲ = ۲$$

خط راست، در نقطه $T(۲,۳)$ بر منحنی مماس است.

۳) داریم:

$$\begin{cases} y = ۳x^۲ + ۲x + ۲ \\ y = x + ۱ \end{cases} \Rightarrow ۳x^۲ + x + ۱ = ۰$$

این معادلهٔ درجه دوم، ریشهٔ حقیقی ندارد. خط راست و سهمی، نقطهٔ مشترکی ندارند.

۴) باید این دستگاه را حل و بحث کنیم:

$$\begin{cases} y = x^۲ + ۳x + m \\ y = x + ۱ \end{cases} \Rightarrow x^۲ + ۲x + m - ۱ = ۰$$

مبین این معادلهٔ درجه دوم چنین است:

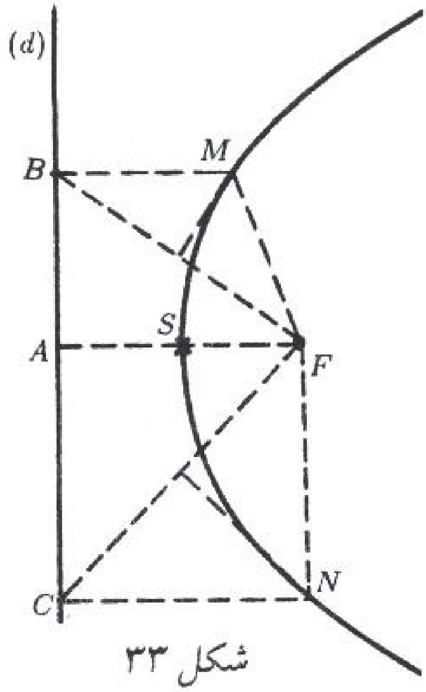
$$A = ۴ - ۴(m - ۱) = ۸ - ۴m = ۴(۲ - m)$$

و روشن است که:

اگر $m < ۲$، آن وقت خط راست منحنی را در دو نقطه قطع می‌کند. مثلاً، به ازای $m = ۱$، خط راست و سهمی در دو نقطه $A(۰, ۱)$ و $B(-۲, -۱)$ به هم برمی‌خورند؛

اگر $m = ۲$، مبین معادلهٔ درجه دوم برابر صفر می‌شود و در نتیجه، خط بر سهمی مماس است: در نقطهٔ $T(-۱, ۰)$؛

اگر $m > ۲$، آن وقت به معادلهٔ درجه دومی با ریشه‌های موهومی می‌رسیم، یعنی خط راست، نقطهٔ مشترکی با سهمی ندارد.



شکل ۳۳

*۴. **تعریف هندسی سهمی.** خط راست d و نقطهٔ F را در بیرون خط راست d در نظر بگیرید. از F، عمود FA را بر خط راست d رسم کنید و وسط پاره‌خط راست FA را S بنامید. سپس، از نقطهٔ دلخواه B واقع بر d به F وصل کنید و نقطهٔ M، محل برخورد عمود منصف پاره‌خط راست FB، با خط راستی را که از B موازی AF رسم شده است، پیدا کنید. همین رسم را دربارهٔ نقطهٔ دیگر C واقع بر d انجام دهید و نقطهٔ N را به دست آورید. هریک از نقطه‌های S، M و N، از نقطهٔ F و خط راست d به یک فاصله‌اند.

$$|SA| = |SF|,\ |MB| = |MF|,\ |NC| = |NF|$$

از این‌گونه نقطه‌ها، که از نقطهٔ F و خط راست d به یک فاصله باشند، باز هم می‌توان پیدا کرد: هر نقطهٔ دلخواهی که روی d انتخاب کنید، نقطه‌ای متناظر با آن پیدا می‌شود که از نقطهٔ F و خط راست d به یک فاصله است. مجموعهٔ این نقطه‌ها (که یک مجموعهٔ بی‌پایان است)، یک سهمی را به وجود می‌آورند. به زبان دیگر:

مکان هندسی نقطه‌هایی از صفحه که از نقطهٔ مفروض F و خط راستِ مفروض d به یک فاصله باشند، سهمی نام دارد.

در ضمن، S راس سهمی و امتداد خط راست SF، محور سهمی است. نقطهٔ F را **کانون سهمی** و خط راست d را **خط هادی سهمی** گویند.

وقتی معادلهٔ سهمی در دستگاه محورهای مختصات، به صورت

$$y = ax^۲ + bx + c$$

باشد، خط هادی آن، موازی با محور $x'x$ است.

منحنی سهمی، یک ویژگی جالب فیزیکی دارد: اگر پرتوهای نور موازی با محور سهمی، بر سهمی بتابد، در برخورد با سهمی می‌شکند و بازتاب آن، از کانون سهمی می‌گذرد. به همین مناسبت ریاضی‌دانان ایرانی (و از جمله ابولوفای بوزجانی) سهمی را آینه سوزان و کانون آن را اجاق نامیدند. این نام‌گذاری به این دلیل بود که، اگر آینه‌ای سهموی شکل را طوری رو به خورشید بگیریم که پرتوهای خورشید، موازی با محور آینه بر آن بتابد، همهٔ این پرتوها، ضمن بازتاب در کانون آینه به هم می‌رسد و اگر در آنجا جسمی قابل سوختن وجود داشته باشد، شعله‌ور می‌شود و می‌سوزد.

تمرین‌ها

۸۶. معادلهٔ دایره را، با معلوم بودن مرکز آن ω و طول شعاع آن R بنویسید.

$$۱)\ \omega(۴, -۷) \text{ و } R = ۵;\quad ۲)\ \omega(-۶, ۳) \text{ و } R = \sqrt{۲};$$
$$۳)\ \omega(۰, -۲) \text{ و } R = \frac{۱}{۲};\quad ۴)\ \omega(-۱, ۰) \text{ و } R = \sqrt{۳}$$

۸۷. دایره $(x - ۲)^۲ + (y - ۳)^۲ = ۲۵$ مفروض است. روشن کنید هریک از نقطه‌های

$$A(-۱, -۱);\ B(۲, -۳),\ C(-۳, ۵);$$
$$D(۴, -۱);\ E(۲, -۲);\ F(۵, ۷);\ G(۱, ۰)$$

نسبت به دایره چه وضعی دارند، یعنی در درون دایره‌اند یا روی محیط دایره یا در بیرون دایره؟

۸۸. دایرهٔ به مرکز $\omega(۱۲, -۵)$ از مبداء مختصات می‌گذرد. معادلهٔ آن را بنویسید.

۸۹. نقطه‌های $M_۱(۲, -۷)$ و $M_۲(-۴, ۳)$ دو انتهای قطری از یک دایره‌اند. معادلهٔ دایره را بنویسید.

۹۰. به قطر پاره‌خط راستی از خط راست $۱۲x + ۵y + ۶ = ۰$ که به دو محور مختصات محدود است، دایره‌ای رسم کرده‌ایم. معادلهٔ این دایره را پیدا کنید.

۹۱. دایره‌ای در مبداء مختصات بر محور $x'x$ مماس است و در نقطهٔ $(۰, -۱)$ محور $y'y$ را قطع می‌کند. معادلهٔ آن را پیدا کنید.

۹۲. معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که، مرکز آن، روی محور $x'x$ باشد و از نقطه‌های $A(۶, ۴\sqrt{۲})$ و $B(۰, -۲\sqrt{۵})$ بگذرد.

۹۳. دایره‌ای از نقطه‌های $A(۳, -۱)$ و $B(-۴, -۸)$ می‌گذرد و شعاعی به طول ۱۳ دارد، معادلهٔ آن را بنویسید.

۹۴. معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که بر محورهای مختصات مماس باشد و از نقطهٔ $M(۲, ۱)$ بگذرد.

۹۵. مرکز دایره‌ای که بر محورهای مختصات مماس است روی خط راست $۲x - y + ۳ = ۰$ واقع است. معادلهٔ دایره را پیدا کنید.

۹۶. معادلهٔ دایره‌ای را پیدا کنید که از نقطه‌های $A(-۲, ۹)$، $B(-۴, ۵)$ و $C(۵, ۸)$ بگذرد.

۹۷. دایره‌ای از نقطه‌های $M(۴, -۱۱)$ و $N(۶, ۳)$ می‌گذرد و مرکز آن روی خط راست $x - y - ۱ = ۰$ واقع است. معادلهٔ دایره را پیدا کنید.

۹۸. دایره‌ای با دایرهٔ $x^۲ + y^۲ + ۶x - ۴y - ۶۲ = ۰$ هم مرکز است و از نقطهٔ $A(۳, -۶)$ می‌گذرد. معادلهٔ آن را پیدا کنید.

۹۹. مختصات نقطه‌های برخورد خط راست $y = x + ۱$ و با دایرهٔ $x^۲ + y^۲ - ۴x + ۱۶y - ۵ = ۰$ را پیدا کنید.

۱۰۰. ثابت کنید دایره‌های

$$x^۲+y^۲+۱۲x-۱۴y+۴۹=۰ \text{ و } x^۲+y^۲-۱۸x+۲y-۳۹=۰$$

بر هم مماس‌اند. معادلهٔ مماس مشترک دو دایره را بنویسید.

۱۰۱. موقعیت خط‌های راست $x-y+۲=۰$، $۳x+۴y-۲۱=۰$ و $x-y-۲=۰$ را نسبت به دایرهٔ $x^۲+y^۲+۸x-۴y=۵$ مشخص کنید.

۱۰۲. معادلهٔ قطری از دایرهٔ $x^۲+y^۲-۶x+۱۴y=۶$ را پیدا کنید که بر وتر $x-۲y=۲$ عمود باشد.

۱۰۳. دایرهٔ $x^۲+(y-۲)^۲=۹$ مفروض است. وتری از دایره، از نقطه $P(۱,\frac{۳}{۲})$ گذشته و در این نقطه نصف شده است. معادلهٔ وتر را پیدا کنید.

۱۰۴. معادلهٔ خط راستی را پیدا کنید که از نقطه $M(-۲,-۳)$ بگذرد و بر دایرهٔ $x^۲+y^۲=۱۳$ مماس باشد.

۱۰۵. موقعیت خط‌راست $y=۶$ نسبت‌به‌دایرهٔ $x^۲+y^۲-۸x-۹=۰$ چگونه است؟

۱۰۶. معادلهٔ یک سهمی چنین است:

$$x^۲-۶x+۸y-۱۵=۰$$

مختصات راس و معادلهٔ محور تقارن آن را پیدا کنید.

۱۰۷. این سهمی‌ها را در دستگاه محورهای مختصات رسم کنید:

$$۱)\ y = x^{۲} - ۴x; \qquad ۲)\ y = -\frac{۱}{۲}x^{۲} + x - ۱;$$

$$۳)\ y = x^{۲} - ۲; \qquad ۴)\ y = ۳ - ۲x^{۲};$$

$$۵)\ y = ۱ - ۲x + x^{۲}; \quad ۶)\ y = -۲x^{۲} - ۱۲x - ۱۸$$

$$۷)\ y = x^{۲} - ۵x + ۶, \quad ۸)\ y = -x^{۲} - ۵x - ۱۴$$

$$۹)\ y = \frac{۱}{۲}x^{۲} + x + ۴$$

۱۰۸. با چه شرطی، معادلهٔ کامل درجه دوم

$$ax^{۲} + by^{۲} + cxy + dx + ey + f = ۰$$

۱) معادلهٔ یک دایره است؛ ۲) معادلهٔ یک سهمی با محوری موازی محور عرض است؟

۱۰۹. این تابع داده شده است:

$$y = (a + ۱)x^{۲} - ۲bx + a + b \qquad (۱)$$

۱) در چه صورت، نمودار تابع (۱)، خط راستی است که از مبداء مختصات می‌گذرد؟

۲) به‌ازای چه مقدارهایی از a و b، سهمی (۱) محور $y'y$ را در نقطه‌ای به عرض ۱− قطع می‌کند و، در ضمن، از نقطه $A(-۳, ۵)$ می‌گذرد؟

۳) a و b را طوری پیدا کنید که سهمی (۱)، در مبداء مختصات، بر محور $x'x$ مماس باشد.

۴) اگر بدانیم، نقطهٔ $S(-۱, -۳)$ راس سهمی (۱) است؛ a و b چه مقدارهایی می‌توانند باشند؟

۵) می‌دانیم سهمی (۱)، از نقطهٔ $M(-۱, ۰)$ می‌گذرد و محور تقارنی به معادلهٔ $x = ۲$ دارد. مقدارهای a و b را پیدا کنید.

*۶) در حالتی که سهمی (۱) از مبداء مختصات می‌گذرد، معادلهٔ مکان هندسی راس آن را پیدا کنید.

*۷) می‌دانیم سهمی (۱)، محور $y'y$ را در نقطه‌ای به عرض ۲ قطع می‌کند. ثابت کنید، در این صورت، سهمی از نقطهٔ ثابت دیگری هم می‌گذرد. مختصات این نقطهٔ ثابت را پیدا کنید.

*۸) در سهمی (۱) فرض کنید $a = -۲$ و $b = ۲$. خط راست $y = m$ را در نظر می‌گیریم و نقطه‌های برخورد آن را با سهمی (در حالتی که آن را قطع می‌کند) A و B و نقطهٔ وسط پاره‌خط راست AB را M می‌نامیم. معادلهٔ مکان هندسی نقطهٔ M را پیدا کنید.

*۹) ثابت کنید خط راست $y = x + ۱$، به شرط $a = ۰$، همیشه (یعنی به ازای هر مقدار حقیقی b)، سهمی (۱) را در دو نقطه قطع می‌کند. معادلهٔ مکان هندسی نقطهٔ وسط این دو نقطهٔ تقاطع را پیدا کنید.

۱۱۰. معادلهٔ دو دایره داده شده است:

$$x^۲ + y^۲ - ۱۰x + ۵ = ۰ \text{ و } x^۲ + y^۲ - ۱۰y + ۱۵ = ۰$$

نقطه‌های برخورد دو دایره را A و B و مرکزهای آن‌ها را $\omega_۱$ و $\omega_۲$ می‌نامیم. مساحت چهارضلعی $\omega_۱ A \omega_۲ B$ را پیدا کنید.

۱۱۱. دو سهمی به معادله‌ای

$$y = x^۲ - ۲x + ۳ \text{ و } y = -x^۲ + ۴x - ۱$$

داده شده‌اند. نقطه‌های برخورد دو سهمی را A و B و مبداء مختصات را O می‌نامیم. مساحت مثلث OAB را پیدا کنید.

۱۱۲. اگر نقطه‌های برخورد سهمی‌های

$$y = ۲x^۲ - ۴x + ۱ \text{ و } y = -x^۲ + x - ۱$$

را M و N و راس‌های آن‌ها را $S_۱$ و $S_۲$ بنامیم، مساحت چهارضلعی $S_۱MS_۲N$ را محاسبه کنید.

۱۱۳. m را طوری پیدا کنید که خط راست $y = x + ۲m + ۱$ بر سهمی $y = x^۲ - ۳x + ۱$ مماس باشد. مختصات نقطهٔ تماس را پیدا کنید.

۱۱۴. ثابت کنید خط راست $y = ۲x - ۱$ بر نمودار سهمی

$$y = x^۲ - ۲x + ۳$$

مماس است. خط راستی عمود بر این مماس در نقطهٔ تماس رسم کرده‌ایم تا سهمی را در نقطهٔ دیگر A قطع کند. نقطهٔ تماس را T و راس سهمی را S بنامید و معادلهٔ ضلع‌های مثلث ATS را پیدا کنید.

۱۱۵. دایرهٔ $x^۲ + y^۲ + ۴y = ۱$ و سهمی $y = x^۲ - ۵$ داده شده‌اند. مختصات نقطه‌های برخورد آن‌ها و مساحت چهارضلعی را که راس‌های آن، در این نقطه‌های برخورد است، پیدا کنید.

***۱۱۶.** معادلهٔ سهمی را پیدا کنید که قرینهٔ سهمی $y = x^۲$، نسبت به نقطهٔ $\omega(۱, ۳)$ باشد.

۱۱۷. سهمی، محور تقارنی موازی محور $y'y$ دارد و می‌دانیم از نقطه‌های زیر گذشته است:

$$A(۱, ۱۳),\ B(۰, ۷۰),\ C(۲, ۱۳۷۰)$$

معادلهٔ سهمی را پیدا کنید.

۵. تابع بخش درست

آشنایی با موضوع. با مثال آغاز می‌کنیم.

مثال ۱. *بین عددهای طبیعی از ۱ تا ۵۰۰۰، چند عددِ بخش‌پذیر بر ۱۷ وجود دارد؟*

حل. عددهایی که بر ۱۷ بخش‌پذیرند، به ترتیب عبارتند از:

$$۱۷,\ ۲ \times ۱۷,\ ۳ \times ۱۷,\ ۴ \times ۱۷,\ \ldots \qquad (۱)$$

آخرین عدد، از بین عددهای ۱ تا ۵۰۰۰، که بر ۱۷ بخش‌پذیر باشد، کدام است؟ از تقسیم ۵۰۰۰ بر ۱۷، خارج قسمتی برابر ۲۹۴ و باقی‌مانده‌ای برابر ۲ به دست می‌آید:

$$۵۰۰۰ = ۲۹۴ \times ۱۷ + ۲$$

که آن را، این طور هم می‌توان نوشت:

$$\frac{۵۰۰۰}{۱۷} = ۲۹۴ + \frac{۲}{۱۷} \qquad (۲)$$

روشن است، آخرین عدد طبیعی کوچکتر از ۵۰۰۰، که بر ۱۷ بخش‌پذیر است، برابر ۱۷ × ۲۹۴ (یعنی ۴۹۹۸) می‌شود. اکنون می‌توانیم دنبالهٔ عددی (۱) را کامل کنیم:

$$۱۷,\ ۲ \times ۱۷,\ ۳ \times ۱۷,\ ۴ \times ۱۷,\ \ldots,\ ۲۹۴ \times ۱۷$$

این‌ها عددهای طبیعی بخش‌پذیر بر ۱۷ هستند که از ۵۰۰۰ تجاوز نمی‌کنند: روی هم ۲۹۴ عدد مختلف.

مساله حل شد. در میان عددهای طبیعی از ۱ تا ۵۰۰۰، روی هم ۲۹۴ عدد وجود دارد که بر ۱۷ بخش‌پذیرند.

ولی به برابری (۲) بیشتر دقت کنیم. کسر $\frac{۵۰۰۰}{۱۷}$ را، برابر با مجموع دو عدد نوشته‌ایم: عدد درست ۲۹۴ و عدد کسری $\frac{۲}{۱۷}$. می‌توانیم این طور بگوییم: ۲۹۴، بخش درست عدد $\frac{۵۰۰۰}{۱۷}$، و $\frac{۲}{۱۷}$ بخش کسری عدد $\frac{۵۰۰۰}{۱۷}$ است.

این مطلب را، در ریاضیات، این طور نشان می‌دهند:

$$\left[\frac{۵۰۰۰}{۱۷}\right] = ۲۹۴;\ \left\{\frac{۵۰۰۰}{۱۷}\right\} = \frac{۲}{۱۷}$$

یعنی، برای **بخش درست عدد** (که گاهی به آن، **جزء صحیح** عدد هم می‌گویند)، نماد [ ] و برای بخش کسری عدد، نماد { } را در نظر گرفته‌اند.

یادداشت. مسالهٔ مثال ۱ را می‌توان در حالت کلی مطرح و حل کرد:

بین عددهای طبیعی از ۱ تا n، چند عددِ بخش‌پذیر بر k وجود دارد؟ (n و k، عددهایی طبیعی هستند).

پاسخ مساله $\left[\frac{n}{k}\right]$ است. بین عددهای از ۱ تا n، به تعداد $\left[\frac{n}{k}\right]$ عدد وجود دارد که بر k بخش‌پذیرند.

۲. تعریف. a را، عدد حقیقی در نظر می‌گیریم، در این صورت

الف. $[a]$ (بخوانید؛ بخش درست عدد a)، یعنی بزرگترین عدد درستی که از a بیشتر نباشد.

$$[۵]=۵, [-۲]=-۲, [۴/۱]=۴,$$
$$\left[\frac{۲}{۷}\right]=۰,\ \left[\frac{۱۵}{۴}\right]=۳,\ [\pi]=۳,$$
$$[-\pi]=-۴,\ \left[-\frac{۲}{۷}\right]=-۱,\ [-۴/۱]=-۵$$

ب. $\{a\}$ (بخوانید: بخش کسری عدد) *برابر است با مقدار مثبتی که از تفاضل* $a-[a]$ *به دست می‌آید.*

در واقع داریم:

$$a=[a]+\{a\}\Rightarrow \{a\}=a-[a]$$

به این چند نمونه دقت کنید:

$$\{۵\}=۰,\ \{-۲\}=۰,\ \{۴/۱\}=۰/۱,$$
$$\left\{\frac{۲}{۷}\right\}=\frac{۲}{۷},\ \left\{\frac{۱۵}{۴}\right\}=\frac{۳}{۴},\ \{\pi\}=۰/۱۴۱۵۹\ldots,$$
$$\{-\pi\}=-\pi-(-۴)=۴-\pi\approx ۰/۸۵۸۴\ldots,$$
$$\left[-\frac{۲}{۷}\right]=-\frac{۲}{۷}-(-۱)=۱-\frac{۲}{۷}=\frac{۵}{۷},$$
$$\{-۴/۱\}=-۴/۱-(-۵)=۵-۴/۱=۰/۹$$

به این ترتیب، عدد $\{a\}$، همیشه نمایندهٔ عددی غیر منفی است.

۳. تابع $y=[x]$. تابع با ضابطهٔ $y=[x]$ برای همهٔ عددهای حقیقی x معین است؛ یعنی اگر شرط دیگری وجود نداشته باشد، دامنهٔ تابع $\mathbf{R}$ است. ولی بُرد تابع (یعنی مقدارهایی که y می‌تواند اختیار کند)، مجموعهٔ $\mathbf{Z}$ (مجموعهٔ عددهای درست) است:

اگر $0 \leq x < 1$، آن وقت $y = [x] = 0$؛

اگر $1 \leq x < 2$، آن وقت $y = [x] = 1$؛

اگر $-1 \leq x < 0$، آن وقت $y = [x] = -1$ و ...

اگر $n \leq x < n + 1$، آن وقت $[x] = n$ $(n \in \mathbf{N})$؛

اگر $-(n + 1) \leq x < -n$، آن وقت $[x] = -(n + 1)$.

بنابراین، برد تابع $y = [x]$، که گاهی آن را به صورت $y = E(x)$ هم می‌نویسند، در دستگاه محورهای مختصات، به صورتی است که

۱) وقتی $n \leq x < n + 1$، آن وقت نمودار $y = [x]$ پاره‌خط راستی از خط راست $y = n$ است؛ انتهای چپ این پاره‌خط جزو نمودار است و انتهای راست آن جزو نمودار نیست؛

اگر $-(n+1) \leq x < -n$، آن وقت نمودار $y = [x]$، پاره‌خط راستی از خط راست $y = -(n + 1)$ است؛ نقطهٔ سمت چپ این پاره‌خط جزو نمودار راست و انتهای راست آن جزو نمودار نیست.

نمودار $y = [x]$، به صورت «پلکانی» با بی‌نهایت «پله» درمی‌آید، به نحوی که ارتفاع و عرض هر پله برابر واحد است. این نمودار در شکل ۳۴ داده شده است.

۴. برخی ویژگی‌های $[x]$.

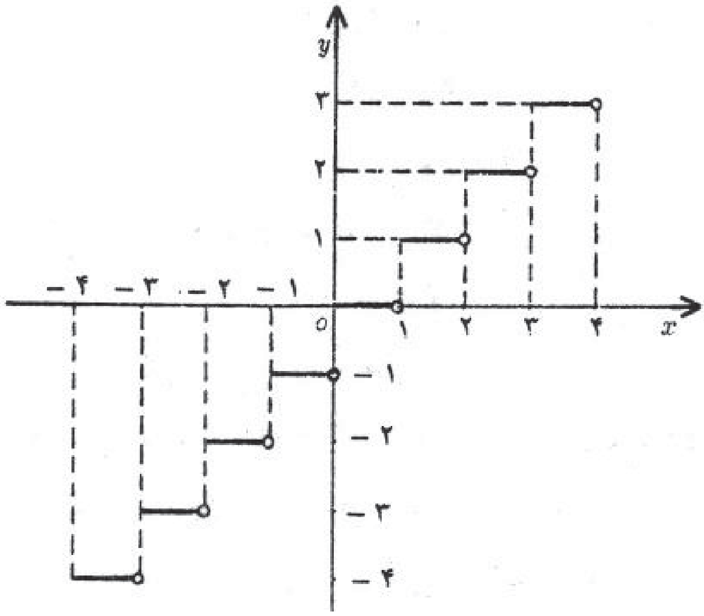
ویژگی ۱. اگر $m \in \mathbf{Z}$، آن وقت $[m + x] = m + [x]$.

x را عددی حقیقی فرض می‌کنیم که از عدد طبیعی $n + 1$ کوچکتر باشد، ولی از عدد n کوچکتر نباشد، یعنی

$$n \leq x < n + 1 \tag{1}$$

روشن است که، در این صورت $[x] = n$. اکنون، اگر m را عددی درست فرض کنیم، نابرابری‌های (۱) را می‌توان این طور نوشت:

$$n + m \leq x + m < n + m + 1$$



شکل ۳۴

یعنی $[x+m] = n+m$؛ از آن‌جا که $[x] = n$، بنابراین

$$[x+m] = [x] + m$$

مثلاً $[x+۴] = [x] + ۴$ و $[x-۳] = [x] - ۳$.

در نابرابری‌های (۱)، x را بین دو عدد مثبت گرفتیم، ولی با استدلالی مشابه، در حالت $-(n+۱) \le x \le -n$ هم روشن می‌شود که

$$[x+m] = [x] + m,\ m \in \mathbf{Z}$$

مثال ۲. فرض می‌کنیم $\alpha = \{x\}$. *اگر بدانیم:*

$$\left[x + \frac{۳}{۸}\right] + [x] = [۲x]$$

α چه مقدارهایی می‌تواند باشد؟

حل. اگر k بخش درست عدد $[x]$ باشد:

$$[x] = k$$

آن وقت $x = k + \alpha$. روشن است که $k \in \mathbf{Z}$ و $0 \leq \alpha < 1$.

در این صورت داریم:

$$\left[x + \frac{3}{8}\right] = \left[k + \left(\alpha + \frac{3}{8}\right)\right] = k + \left[\alpha + \frac{3}{8}\right],$$
$$[x] = [k + \alpha] = k;\ [2x] = [2k + 2\alpha] = 2k + [2\alpha]$$

بنابراین، برابری فرض، به این صورت درمی‌آید:

$$\left[\alpha + \frac{3}{8}\right] = [2\alpha]$$

دو حالت در نظر می‌گیریم:

۱) $\frac{5}{8} > \alpha$، یعنی $\alpha + \frac{3}{8} < 1$ و $\left[\alpha + \frac{3}{8}\right] = 0$. در این حالت، به برابری $[2\alpha] = 0$ می‌رسیم که برای $\alpha < \frac{1}{2}$ برقرار است. به این ترتیب، برابری فرض مساله، برای $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$ برقرار است.

۲) $\frac{5}{8} \leq \alpha$، یعنی $\left[\alpha + \frac{3}{8}\right] = 1$. در این حالت، به برابری $[2\alpha] = 1$ می‌رسیم که به ازای $\frac{1}{2} < \alpha$ برقرار است.

پاسخ. $0 \leq \{x\} = \alpha < \frac{1}{2}$ یا $\frac{5}{8} \leq \{x\} = \alpha < 1$.

ویژگی ۲. *برای عددهای حقیقی x و y، همیشه داریم:*

$$[x + y] \geq [x] + [y]$$

فرض می‌کنیم:

$$x = k + \alpha,\ y = h + \beta$$

که در آن‌ها، $k \in \mathbf{Z}$، $h \in \mathbf{Z}$، $0 \leq \alpha < 1$ و $0 \leq \beta < 1$.

با توجه به این فرض‌ها، خواهیم داشت:

$$[x] = k,\ [y] = h,$$

بنابراین

$$[x+y] = k + h + [\alpha + \beta],$$
$$[x] + [y] = k + h$$

مقایسهٔ مقدارهای $[x+y]$ و $[x] + [y]$ نشان می‌دهد که،

اگر $۰ \leq \alpha + \beta < ۱$، آن وقت

$$[x+y] = [x] + [y]$$

اگر $۱ \leq \alpha + \beta < ۲$، آن وقت

$$[x+y] = [x] + [y] + ۱$$

به این ترتیب، در هر حال داریم:

$$[x+y] \geq [x] + [y]$$

مثال ۳. می‌دانیم $[۵x] = ۵[x] + a$. عدد درست a، چه مقدارهایی می‌توانند باشد؟

حل. k را عددی درست $۰ \leq \alpha < ۱$ می‌گیریم و فرض می‌کنیم:

$$x = k + \alpha$$

در این صورت $[x] = k$ و $[۵x] = ۵k + [۵\alpha]$.

۱) اگر $\circ \le \alpha < \frac{۱}{۵}$، آن وقت $[۵\alpha] = \circ$ و

$$[۵x] = ۵[x]$$

۲) اگر $\frac{۱}{۵} \le \alpha < \frac{۲}{۵}$، آن وقت $[۵\alpha] = ۱$ و

$$[۵x] = ۵[x] + ۱$$

۳) اگر $\frac{۲}{۵} \le \alpha < \frac{۳}{۵}$، آن وقت $[۵\alpha] = ۲$ و

$$[۵x] = ۵[x] + ۲$$

۴) اگر $\frac{۳}{۵} \le \alpha < \frac{۴}{۵}$، آن وقت $[۵\alpha] = ۳$ و

$$[۵x] = ۵[x] + ۳$$

۵) اگر $\frac{۴}{۵} \le \alpha < ۱$، آن وقت $[۵\alpha] = ۴$ و

$$[۵x] = ۵[x] + ۴$$

پاسخ. a می‌تواند یکی از پنج عدد ۰، ۱، ۲، ۳ یا ۴ باشد.

به طور کلی، در برابری $[nx] = n[x] + a$، که در آن، n عددی درست و مثبت است، a می‌تواند یکی از عددهای از ۰ تا $n - ۱$ را اختیار کند.

خودتان، برای حالتی که n عددی درست و منفی باشد، مساله را حل کنید.

مثال ۴. *به‌ازای چه مقدارهایی از عدد حقیقی x، حاصل کسر*

$$y = \frac{x}{x^{۲} - ۵x + ۷}$$

برابر با عدد درستی می‌شود؟

حل. k را عددی درست می‌گیریم و فرض می‌کنیم داشته باشیم:

$$\frac{x}{x^{۲} - ۵x + ۷} = k$$

اگر این برابری را، نسبت به x منظم کنیم، به دست می‌آید:

$$kx^{۲} - (۵k + ۱)x + ۷k = ۰ \qquad (۱)$$

این معادله، به‌ازای $k = ۰$، ریشهٔ $x = ۰$ را می‌پذیرد. در حالت $k \neq ۰$، معادلهٔ (۱) وقتی ریشه‌های حقیقی دارد که مبیّن آن منفی نباشد:

$$\Delta = (۵k + ۱)^{۲} - ۲۸k^{۲} = -۳k^{۲} + ۱۰k + ۱ \geq ۰$$

معادلهٔ $-۳k^{۲} + ۱۰k + ۱ = ۰$ دو ریشه دارد:

$$k_{۱} = \frac{۵ - \sqrt{۲۸}}{۳} \text{ و } k_{۲} = \frac{۵ + \sqrt{۲۸}}{۳}$$

k عددی درست است. با توجه به این‌که $\sqrt{۲۸}$ به تقریب برابر ۵/۲۹ است، مقدارهای $k_{۱}$ و $k_{۲}$ چنین می‌شوند:

$$k_{۱} = \left[\frac{۵ - \sqrt{۲۸}}{۳}\right] = \left[-\frac{۰/۲۹}{۳}\right] = -۱$$
$$k_{۲} = \left[\frac{۵ + \sqrt{۲۸}}{۳}\right] = \left[\frac{۱۰/۲۹}{۳}\right] = ۳$$

بنابراین، باید این نامعادله را حل کنیم:

$$-۳(k + ۱)(k - ۳) \geq ۰ \Rightarrow (k + ۱)(k - ۳) \leq ۰$$

که برای آن به دست می‌آید: $-1 < k \leq 3$ به این ترتیب k، یعنی مقدار کسر، می‌تواند برابر یکی از عددهای درست ۰، ۱، ۲ یا ۳ باشد.

توجه کنید: ۱− از $\frac{5-\sqrt{28}}{3}$ کوچکتر است، بنابراین k (که باید از $\frac{5-\sqrt{28}}{3}$ بزرگتر باشد) نمی‌تواند برابر ۱− شود؛ ولی $\frac{5+\sqrt{28}}{3} > 3$ و چون $k < \frac{5+\sqrt{28}}{3}$، بنابراین $k = 3$ قابل قبول است.

به ازای این مقدارهای k، برای x به دست می‌آید:

$$x \in \{0, 2, \frac{7}{3}, 3, \frac{7}{2}, 3-\sqrt{2}, 3+\sqrt{2}\}$$

مثال ۵. *الف) درستی این اتحاد را ثابت کنید:*

$$\left[x+\frac{1}{2}\right]+[x]=[2x]$$

ب) اگر x عددی حقیقی باشد، این مجموع را محاسبه کنید:

$$\left[\frac{x+1}{2}\right]+\left[\frac{x+2}{4}\right]+\left[\frac{x+4}{8}\right]+\ldots+\left[\frac{x+2^{n-1}}{2^n}+\ldots\right]$$

حل. الف) دو حالت پیش می‌آید:

۱) $x = k + \alpha$ می‌گیریم که، در آن $k \in \mathbf{Z}$ و $0 < \alpha < \frac{1}{2}$. در این صورت داریم:

$$\left[x+\frac{1}{2}\right]+[x]=\left[k+\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)\right]+[k+\alpha]=2k;$$

(چون $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$، پس $0 \leq \alpha + \frac{1}{2} < 1$). از طرف دیگر

$$[2x]=[2k+2\alpha]=2k, (0 \leq 2\alpha < 1)$$

۲) $x = k + \alpha$ که، در آن $k \in \mathbf{Z}$ و $\frac{۱}{۲} \le \alpha < ۱$. داریم:

$$\left[x + \frac{۱}{۲}\right] + [x] = \left[k + \frac{۱}{۲} + \alpha\right] + [k + \alpha] = ۲k + ۱$$

(در این حالت، $۱ \le \frac{۱}{۲} + \alpha < \frac{۳}{۲}$). در ضمن

$$[۲x] = [۲k + ۲\alpha] = ۲k + ۱, (۱ \le ۲\alpha < ۲)$$

یعنی در هر حال، اتحاد مساله، برقرار است.

ب) در آغاز یادآوری می‌کنیم که، جمله‌های این مجموع، از جایی به بعد، برابر صفر می‌شوند. فرض کنید $x = ۱۰۰۰$ سه جملهٔ اول این مجموع چنین است:

$$\left[\frac{۱۰۰۰ + ۱}{۲}\right] = ۵۰۰, \left[\frac{۱۰۰۰ + ۲}{۴}\right] = ۲۵۰, \left[\frac{۱۰۰۰ + ۴}{۸}\right] = ۱۲۵,$$

و برای جملهٔ دهم این مجموع داریم:

$$\left[\frac{۱۰۰۰ + ۲^{۹}}{۲^{۱۰}}\right] = \left[\frac{۱۰۰۰ + ۵۱۲}{۱۰۲۴}\right] = \left[\frac{۱۵۱۲}{۱۰۲۴}\right] = ۱$$

از این جا به بعد همهٔ جمله‌ها برابر صفر می‌شوند. مثلاً برای جملهٔ (یازدهم) داریم:

$$\left[\frac{۱۰۰۰ + ۲^{۱۰}}{۲^{۱۱}}\right] = \left[\frac{۲۰۲۴}{۲۰۴۸}\right] = ۰$$

برای پیدا کردن حاصل این مجموع، از اتحاد مثال ۵ـالف) استفاده می‌کنیم. اتحاد را می‌توان به صورت $\left[x + \frac{۱}{۲}\right] = [۲x] - [x]$ نوشت. این اتحاد،

برای هر مقدار x برقرار است. پس

$$\left[\frac{x+1}{2}\right]=\left[\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right]=[x]-\left[\frac{x}{2}\right]$$

$$\left[\frac{x+2}{4}\right]=\left[\frac{x}{4}+\frac{1}{2}\right]=\left[\frac{x}{2}\right]-\left[\frac{x}{4}\right]$$

$$\left[\frac{x+4}{8}\right]=\left[\frac{x}{8}+\frac{1}{2}\right]=\left[\frac{x}{4}\right]-\left[\frac{x}{8}\right]$$

. . . .

$$\left[\frac{x+2^{n-1}}{2^n}\right]=\left[\frac{x}{2^n}+\frac{1}{2}\right]=\left[\frac{x}{2^{n-1}}\right]-\left[\frac{x}{2^n}\right]$$

اگر این برابری‌ها را با هم جمع کنیم، در سمت چپ برابری، همان مجموع مورد نظر و در سمت راست برابری $[x]-\left[\frac{x}{2^n}\right]$ به دست می‌آید، ولی چون تعداد جمله‌ها بی‌نهایت است و n مرتباً بزرگ می‌شود، مقدار $\left[\frac{x}{2^n}\right]$، برای مقدارهای به اندازهٔ کافی بزرگ n، برابر صفر می‌شود. درنتیجه

$$\left[\frac{x+1}{2}\right]+\left[\frac{x+2}{4}\right]+\ldots+\left[\frac{x+2^{n-1}}{2^n}\right]+\ldots=[x]$$

***مثال ۶.** *مقدار x را از این معادله به دست آورید:*

$$\left[\frac{6x+5}{8}\right]=\frac{15x-7}{5}$$

حل. باید حاصل کسر $\frac{15x-7}{5}$ برابر عددی درست باشد. این عدد درست را a می‌نامیم:

$$\frac{15x-7}{5}=a\Rightarrow x=\frac{5a+7}{15}$$

در نتیجه، مقدار کسر $\frac{6x+5}{8}$، بر حسب a، چنین می‌شود:

$$\frac{6x+5}{8}=\frac{\frac{6(5a+7)}{15}+5}{8}=\frac{10a+39}{40}$$

بنابراین، معادلهٔ مفروض، به این صورت درمی‌آید:

$$\left[\frac{10a+39}{40}\right]=a$$

که در آن، a عددی درست است. از این‌جا باید داشته باشیم:

$$a\leq\frac{10a+39}{40}<a+1$$

که می‌توان آن را، به صورت یک دستگاه شامل دو نامعادله نوشت:

$$\begin{cases}\frac{10a+39}{40}\geq a\\ \frac{10a+39}{40}<a+1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-30a+39\geq 0\\ -30a-1<0\end{cases}$$

معادلهٔ اول دستگاه به جواب $a\leq\frac{13}{10}$ و معادلهٔ دوم آن به جواب $a>-\frac{1}{30}$ می‌رسد؛ یعنی جواب دستگاه چنین است:

$$-\frac{1}{30}<a\leq\frac{13}{10}$$

ولی a، عددی درست است. بین عددهای $-\frac{1}{30}$ و $\frac{13}{10}$، تنها دو عدد درست وجود دارد: $a=0$ یا $a=1$. با قرار دادن این مقدارها، به‌جای a، مقدارهای x به دست می‌آید:

$$\frac{15x-7}{5}=0\Rightarrow x=\frac{7}{15};\ \frac{15x-7}{5}=1\Rightarrow x=\frac{4}{5}$$

معادلهٔ مفروض، دو ریشه دارد $x_۱ = \frac{۷}{۱۵}$، $x_۲ = \frac{۴}{۵}$.

آزمایش ریشه‌ها، درستی نتیجه‌گیری را تایید می‌کند: به ازای $x = \frac{۷}{۱۵}$، به دست می‌آید: $\left[\frac{۳۹}{۴۰}\right] = ۰$ و به‌ازای $x = \frac{۴}{۵}$، به دست می‌آید: $\left[\frac{۴۹}{۴۰}\right] = ۱$.

مثال ۷. *نمودار تابع $y = x + [x]$ را رسم کنید.*

حل. تابع مفروض، برای مقدارهای مختلف x، چنین است:

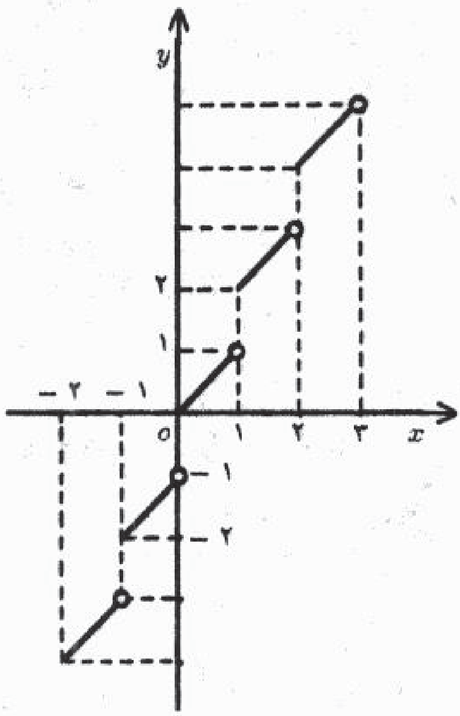
$$\begin{gathered} \cdots\cdots\cdots\cdots \\ -۲ \leq x < -۱ \Rightarrow y = x - ۲ \\ -۱ \leq x < ۰ \Rightarrow y = x - ۱ \\ ۰ \leq x < ۱ \Rightarrow y = x \\ ۱ \leq x < ۲ \Rightarrow y = x + ۱ \\ ۲ \leq x \leq ۳ \Rightarrow y = x + ۲ \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{gathered}$$

نمودار تابع $y = x + [x]$ در شکل ۳۵ داده شده است.

مثال ۸. *مسافری x روز و هر روز x کیلومتر پیمود تا به مقصد رسید. اگر این مسافر، روزی ۲۰ کیلومتر می‌پیمود و بعد از هر ۴۰ کیلومتر یک روز استراحت می‌کرد، زمان مسافرت او ۳۷ روز بیشتر می‌شد. مسافر چند روز در راه بوده است؟ (x، عددی درست است).*

حل. مسافر، برای رسیدن به مقصد، x روز و هر روز x کیلومتر در راه بوده، بنابراین طول تمام راه، برابر است با $x^۲$ کیلومتر.

از طرف دیگر، اگر مسافر، در زمان پیمودن این $x^۲$ کیلومتر، بعد از هر ۴۰ کیلومتر، یک روز استراحت کند، تعداد روزهای استراحت او، برابر



شکل ۳۵

$\left[\frac{x^۲}{۴۰}\right]$ می‌شود.

در حالت دوم، به جای x روز، $x + ۳۷$ روز در راه بوده، ولی $\left[\frac{x^۲}{۴۰}\right]$ روز آن را استراحت کرده است، یعنی تعداد روزهایی که در حرکت بوده، برابر است با

$$x + ۳۷ - \left[\frac{x^۲}{۴۰}\right]$$

و چون در هر روز ۲۰ کیلومتر پیموده است، باید داشته باشیم:

$$۲۰\left(x + ۳۷ - \left[\frac{x^۲}{۴۰}\right]\right) = x^۲ \qquad (۱)$$

برای پیدا کردن x، باید معادلهٔ (۱) را حل کنیم. این معادله، بعد از اندکی جابه‌جایی جمله‌ها، به این صورت درمی‌آید:

$$\left[\frac{x^۲}{۴۰}\right] = -\frac{۱}{۲۰}x^۲ + x + ۳۷$$

روشن است که باید $-\frac{۱}{۲۰}x^{۲}+x+۳۷$ عددی درست باشد و، درضمن، داشته باشیم:

$$-\frac{۱}{۲۰}x^{۲}+x+۳۷\le\frac{x^{۲}}{۴۰}<-\frac{۱}{۲۰}x^{۲}+x+۳۸$$

این نابرابری‌ها را می‌توان به صورت دستگاه زیر نوشت:

$$\begin{cases}\dfrac{x^{۲}}{۴۰}\ge-\dfrac{۱}{۲۰}x^{۲}+x+۳۷\\[2mm]\dfrac{x^{۲}}{۴۰}<-\dfrac{۱}{۲۰}x^{۲}+x+۳۸\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۳x^{۲}-۴۰x-۱۴۸۰\ge ۰\\ ۳x^{۲}-۴۰x-۱۵۲۰<۰\end{cases}$$

باید جواب مشترک این دو نامعادله را پیدا کنیم. ابتدا نامعادلهٔ اول را حل می‌کنیم. داریم:

$$\begin{aligned}۳x^{۲}-۴۰x-۱۴۸۰&=۳\left(x^{۲}-\frac{۴۰}{۳}x-\frac{۱۴۸۰}{۳}\right)=\\&=۳\left[\left(x-\frac{۲۰}{۳}\right)^{۲}-\frac{۴۸۴۰}{۹}\right]=\\&=۳\left(x-\frac{۲۰-۲۲\sqrt{۱۰}}{۳}\right)\left(x-\frac{۲۰+۲۲\sqrt{۱۰}}{۳}\right)=\\&=۳(x+۱۶/۴\ldots)(x-۲۹/۷\ldots)\ge ۰\end{aligned}$$

برای این‌که حاصل ضرب دو پرانتز مثبت باشد، باید هر دو پرانتز منفی یا هر دو پرانتز مثبت باشند. اگر بخواهیم هر دو پرانتز منفی باشند، به جواب $x\le-۱۶/۴\ldots$ می‌رسیم و در حالت مثبت بودن هر دو پرانتز، جواب $x\ge ۲۹/۷\ldots$ به دست می‌آید: برای این‌که نامعادلهٔ اول دستگاه برقرار باشد، باید داشته باشیم:

(۲) $\qquad x\ge ۲۹/۷\ldots$ یا $x\le-۱۶/۴\ldots$

به همین ترتیب، با حل نامعادلهٔ دوم به دست می‌آید:

$$-16/8\ldots < x < 30/1\ldots \qquad (3)$$

عددهایی در دستگاه ما صدق می‌کنند که با هر دو شرط (۲) و (۳) سازگار باشند. این جواب‌ها چنین‌اند:

$$1)\ -16/8\ldots < x \leq -16/4\ldots$$

ولی از این جواب، عدد درستی برای x به دست نمی‌آید.

$$2)\ 29/7\ldots \leq x < 30/1\ldots$$

بین دو عدد ۲۹/۷... و ۳۰/۱...، تنها یک عدد درست وجود دارد: ۳۰.

پاسخ. $x = 30$.

مثال ۹. *این نامعادله را حل کنید:*

$$\{x\}^2 - \frac{5}{6}\{x\} + \frac{1}{6} < 0$$

حل. به یاد داریم که $\{x\}$، یعنی بخش کسری عدد x و یا، به زبان ریاضی

$$\{x\} = x - [x]$$

$a = \{x\}$ فرض می‌کنیم. به این نامعادله می‌رسیم:

$$a^2 - \frac{5}{6}a + \frac{1}{6} < 0 \Rightarrow 6a^2 - 5a + 1 < 0 \Rightarrow$$
$$(2a - 1)(3a - 1) < 0$$

برای این‌که حاصل ضرب دو پرانتز منفی شود، باید یکی از آن‌ها مثبت و دیگری منفی باشد. اگر پرانتز اول را مثبت و پرانتز دوم را منفی بگیریم، به جواب نمی‌رسیم، زیرا $a < \frac{۱}{۲}$ با $a > \frac{۱}{۳}$ سازگار نیست. پرانتز اول منفی و پرانتز دوم مثبت است و ما را به این جواب می‌رساند:

$$\frac{۱}{۳} < a < \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{۱}{۳} < \{x\} < \frac{۱}{۲}$$

بنابراین، بخش کسری x، باید بین $\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۱}{۲}$ باشد، یعنی

$$n + \frac{۱}{۳} < x < n + \frac{۱}{۲}, \ (n \in \mathbf{Z})$$

تمرین‌ها

۱۱۸. می‌دانیم $۰ \le \alpha < ۱$. ثابت کنید:

$$\left[\alpha + \frac{۱}{۲}\right] + [\alpha] = [۲\alpha]$$

۱۱۹. $[a]$ بزرگتر است یا $\{a\}$؟

۱۲۰. الف) می‌دانیم $[x] = [y]$. مقدار $x - y$ را پیدا کنید؛ ب) می‌دانیم $\{x\} = \{y\}$. $x - y$ را پیدا کنید.

۱۲۱. حاصل هریک از این مجموع‌ها را محاسبه کنید:

$$۱)\ A = [\sqrt{۱}] + [\sqrt{۲}] + [\sqrt{۳}] + \ldots + [\sqrt{۱۵}];$$
$$۲)\ \left\{\frac{m}{n}\right\} + \left\{\frac{۲m}{n}\right\} + \ldots + \left\{(n-۱)\frac{m}{n}\right\} + \{m\}$$

m و n، عددهایی طبیعی و نسبت به هم اول‌اند، درضمن $m > ۱$.

۱۲۲. این معادله‌ها را حل کنید.

۱) $[x+۱]+[x-۲]-[x+۳]=۲$;

۲) $[x+۳]-[x-۵]=۸$;

۳) $[x]^۲-۵[x]+۴=۰$;

۴) $\{x\}^۲-\frac{۳}{۴}\{x\}+\frac{۱}{۸}=۰$

۵) $[x^۲-۵x+۶]=۱$;

۶) $[x^۲]=۴$; ۷) $[x]^۲=۴$;

۸) $[-x^۲+۳x]=\left[x^۲+\frac{۱}{۲}\right]$;

۹) $\left[x+\frac{۱}{۲}\right]+[x]^۲=[۲x]+۲$;

*۱۰) $[x[x]]=۱$; *۱۱) $\left[\frac{x-۳}{۲}\right]=\left[\frac{x-۲}{۳}\right]$;

*۱۲) $۲x^۲+[x]=x^۴$; ۱۳) $[x]\cdot\{x\}=۱$;

*۱۴) $[x]=\left[\frac{x^۳-۲}{۳}\right]$; ۱۵) $\sqrt{x+[x]}+\sqrt{x-\sqrt{x}}=۱$

*۱۶) $\left[x+\frac{۳}{۸}\right]+[x]=\frac{۷x-۲}{۳}$;

۱۷) $[\sin x]=[\cos x]$; ۱۸) $[\sin x+\cos x]=۱$;

*۱۹) $[\sin x+\cos x]=۰$; *۲۰) $[\sin x]+[\cos x]=-۱$;

*۲۱) $[\sin x+\cos x]=-۲$;

*۲۲) $\sqrt{[-۷x^۲+۳x+۴]}=[۲-\sin x]$

۱۲۳. این نامعادله‌ها را حل کنید:

۱) $[x]<۲$; ۲) $[x]\le ۲$; ۳) $[x]>۲$;

۴) $[x]\ge ۲$; ۵) $[x]^۲-۵[x]-۶<۰$;

۶) $[x]^۲-۷[x]+۶\ge ۰$; ۷) $\{x\}^۲-\frac{۵}{۲}\{x\}+۱<۰$

۱۲۴. این دستگاه‌ها را حل کنید:

$$۱)\ \begin{cases} ۲[x]+۳[y]=۸ \\ ۳[x]-[y]=۱ \end{cases};\qquad ۲)\ \begin{cases} ۲\{x\}-۳\{y\}=۱ \\ ۲\{x\}+۴\{y\}=۲ \end{cases};$$

$$۳)\ \begin{cases} [x+y+۴]=۱۸-y \\ [x+۱]+[y-۱]=۱۸-x-y \end{cases}$$

$$۴)\ \begin{cases} [x]+[y-۲]=۵-x \\ [x+۳]=۶-x-y \end{cases}$$

۱۲۵. پیاده‌ای با سرعت ۵ کیلومتر در ساعت حرکت می‌کند و بعد از پیمودن هر ۴ کیلومتر، به استراحت می‌پردازد. هر استراحت او، به‌جز استراحت چهارم، ۱۰ دقیقه طول می‌کشد و در توقف چهارم، یک ساعت استراحت می‌کند. این مسافر، ساعت ۴ صبح حرکت کرده و نیمروز (ساعت ۱۲) به مقصد رسیده است. مسافر چه مسافتی را پیموده است، به شرطی که این مسافت بر حسب کیلومتر، عددی درست باشد؟

۱۲۶. نمودار هریک از این تابع‌ها را رسم کنید:

$۱)\ y=\{x\};$ $\quad ۲)\ y=[۲x];$ $\quad ۳)\ y=۲[x]$

$۴)\ y=\{۲x\};$ $\quad ۵)\ y=۲\{x\};$

$۶)\ y=\frac{x}{[x]}(-۲\le x<۲);$

$۷)\ y=[\sqrt{x}](۰\le x<۴);$ $\quad ۸)\ y=x[x](-۲\le x\le ۲);$

۱۲۷. n عددی طبیعی است، ثابت کنید:

$$\left[\frac{n}{۲}\right]+\left[\frac{n+۱}{۲}\right]=n$$

*۱۲۸. روی صفحهٔ محورهای مختصات، مجموعهٔ نقطه‌های (x,y) را طوری پیدا کنید که، برای آن‌ها، داشته باشیم: $[y]=[x]$.

۶. تعمیم مفهوم توان و تابع نمایی

§۱. مفهوم توان را می‌توان تعمیم داد

در جلد اول «ریاضیات محاسبه‌ای»، توان را به عنوان تکرار عمل ضرب تعریف کردیم:

$$a^{۳} = a \times a \times a; (-۲)^{۲} = (-۲)(-۲) = ۴;$$

یعنی، ضمن تعریف، پذیرفتیم که در a^n، باید n را عددی طبیعی بگیریم تا برای ما معنا داشته باشد. در واقع، اگر n عدد منفی یا کسری و یا صفر باشد، نمی‌توان، طبق تعریف، معنایی برای a^n پیدا کرد.

یکی از ویژگی‌های ریاضیات این است که، در طول تاریخ تکامل خود، همیشه توانسته است از تنگنای حالت‌های خاص، خودش را آزاد کند و به حالت‌های کلی‌تر برساند. وقتی مثل مصری‌ها، عیلامی‌ها و بابلی‌ها، مثلث با ضلع‌های به طول ۳ و ۴ و ۵ را مثلث قائم‌الزاویه بدانیم، حالتی خاص در نظر گرفته‌ایم، ولی وقتی می‌گوییم، برای مثلث با ضلع‌های به طول a، b و c، اگر داشته باشیم $a^{۲} + b^{۲} = c^{۲}$، با مثلثی قائم‌الزاویه سروکار داریم، حالتی کلی‌تر و عام‌تر در نظر گرفته‌ایم.

اگر بگوییم $۳ \times ۴ = ۴ \times ۳$، حالتی خاص را بیان کرده‌ایم، در حالی که با بیان برابری $a \times b = b \times a$، قانونی از ضرب را در حالت کلی‌تر خود آورده‌ایم.

برای کلی‌تر کردن یک مفهوم یا یک قاعده، دو راه در ریاضیات وجود دارد؛ ۱) اثبات قانون یا قضیه‌ای در حالت کلی، به یاری استدلال‌های ریاضی؛ ۲) تعمیم تعریف و تطبیق آن با اوضاع و احوال تازه. ولی در نوع دوم تعریف، باید مراقب بود که، تعریف تازه، با تعریف قبلی سازگار باشد، یعنی در حالت‌های ساده و خاص هم، دشواری به وجود نیاورد.

اکنون، برای تعمیم مفهوم توان، سه تعریف تازه می‌آوریم:

$$۱)\ a^{۰} = ۱ \quad (a \in \mathbf{R})$$

آیا این تعریف، قانون‌هایی را که دربارهٔ توان خوانده‌ایم، نقض نمی‌کند؟ نه! به عنوان نمونه، می‌دانیم در تقسیم دو توان بر یکدیگر، اگر پایه‌ها برابر باشند، خارج قسمت برابر است با توانی که همان پایه و نمایی برابر تفاضل نماها داشته باشد. اگر $a \in \mathbf{R}$، $m > n$ و m و n عددهایی طبیعی باشند، آن وقت

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

تعریفی که برای توان صفر یک عدد کردیم، با این قانون سازگار است. می‌دانیم، خارج قسمت حاصل از تقسیم یک عدد بر خودش، برابر است با ۱:

$$a^m : a^m = ۱$$

ولی اگر طبق قانونِ پایه‌های مشترک عمل کنیم:

$$a^m : a^m = a^{m-m} = a^{۰}$$

که طبق تعریف (۱) آن را برابر ۱ گرفتیم، یعنی همان نتیجه‌ای که از تقسیم یک عدد بر خودش به دست می‌آید.

$$۲)\ a^{-n} = \frac{۱}{a^n},\ (a \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N})$$

بنابر چنین تعریفی؛ هر توانی که نمای منفی داشته باشد، برابر است با عکس آن توان، به شرطی که نما را مثبت به حساب آوریم.

$$۵^{-۲} = \frac{۱}{۵^۲} = \frac{۱}{۲۵};\ (-۳)^{-۴} = \frac{۱}{(-۳)^۴} = \frac{۱}{۸۱}$$

این تعریف هم، با قانون تقسیم توان‌ها (دربارهٔ نماهای طبیعی) سازگار است. اگر از قانون تقسیم توان‌ها پیروی کنیم:

$$a^۲ : a^۵ = \frac{a \times a}{a \times a \times a \times a \times a} = \frac{۱}{a^۳};$$

$$a^۲ : a^۵ = a^{۲-۵} = a^{-۳} = \frac{۱}{a^۳}$$

تعریف (۲)، برای نمای منفی، با تعریف عادی توان، سازگار است.

$$۳)\ a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m},\ (a \in \mathbf{R}, m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N})$$

سازگاری این تعریف با قانون‌های قبلی مربوط به توان

$$(a^{\frac{m}{n}})^n = a^{\frac{m}{n} \times n} = a^m;$$

$$(\sqrt[n]{a^m})^n = a^m$$

مثال ۱. *این کسرها را، با وارد کردن نمای منفی، از حالت کسری درآورید.*

$$۱)\ \frac{۲}{x^۲},\quad ۲)\ ۰/۰۰۰۰۰۱,\quad ۳)\ \frac{a+b}{a-b},\quad ۴)\ \frac{۳a^۴b^۳}{cd^۲}$$

حل. ۱) $\frac{۲}{x^{۲}} = ۲ \times \frac{۱}{x^{۲}} = ۲x^{-۲}$؛

۲) $۰/۰۰۰۰۰۱ = \frac{۱}{۱۰^{۶}} = ۱۰^{-۶}$؛

۳) $\frac{a+b}{a-b} = (a+b)\frac{۱}{a-b} = (a+b)(a-b)^{-۱}$؛

۴) $\frac{۳a^{۴}b^{۳}}{cd^{۲}} = ۳a^{۴}b^{۳} \cdot \frac{۱}{c} \cdot \frac{۱}{d^{۲}} = ۳a^{۴}b^{۳}c^{-۱}d^{-۲}$.

مثال ۲. این کسرها را به عبارت‌هایی تبدیل کنید که توان منفی نداشته باشند:

$$۱)\ a^{-۲}(a+x)^{-۳}(b^{۲}+c^{۲})^{۵};$$

$$۲)\ ۱۰x^{۲}y^{-۵}z^{-۱}; \quad ۳)\ p^{-۶}q^{-۷}r^{۳} + \frac{۲}{۳}p^{۲}q^{-۲}r^{-۵}$$

حل.

$$۱)\ a^{-۲}(a+x)^{-۳}(b^{۲}+c^{۲})^{۵} =$$

$$= \frac{۱}{a^{۲}} \cdot \frac{۱}{(a+x)^{۳}}(b^{۲}+c^{۲})^{۵} = \frac{(b^{۲}+c^{۲})^{۵}}{a^{۲}(a+x)^{۳}};$$

$$۲)\ ۱۰x^{۲}y^{-۵}z^{-۱} = \frac{۱۰x^{۲}}{y^{۵}z};$$

$$۳)\ p^{-۶}q^{-۷}r^{۳} + \frac{۲}{۳}p^{۲}q^{-۲}r^{-۵} = \frac{r^{۳}}{p^{۶}q^{۷}} + \frac{۲p^{۲}}{۳q^{۲}r^{۵}}$$

مثال ۳. این کسرها را با استفاده از نماهای منفی و کسری بنویسید:

$$۱)\ \frac{\sqrt[۳]{(a+b)^{۷}c^{۴}}}{\sqrt[۵]{a^{۳}} \cdot \sqrt[۶]{m^{۵}}}; \quad ۲)\ \frac{\sqrt{a^{۲}+x^{۲}}}{\sqrt{a} \cdot \sqrt[۳]{a+x}};$$

$$۳)\ \frac{\sqrt[8]{a^5b^7}}{c^{12}}+\sqrt[8]{\frac{a^6b^4}{c^{20}}}$$

حل.

$$۱)\ \frac{\sqrt[3]{(a+b)^7c^4}}{\sqrt[5]{a^3}\cdot\sqrt[6]{m^5}}=$$

$$=\frac{(a+b)^{\frac{7}{3}}\cdot c^{\frac{4}{3}}}{d^{\frac{3}{5}}\cdot m^{\frac{5}{6}}}=(a+b)^{\frac{7}{3}}c^{\frac{4}{3}}d^{-\frac{3}{5}}m^{-\frac{5}{6}};$$

$$۲)\ \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a+x}}=(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}a^{-\frac{1}{2}}(a+x)^{-\frac{1}{3}};$$

$$۳)\ \frac{\sqrt[8]{a^5b^7}}{c^{12}}+\sqrt[8]{\frac{a^6b^4}{c^{20}}}=a^{\frac{5}{8}}b^{\frac{7}{8}}c^{-12}+a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{1}{2}}c^{-\frac{5}{2}}$$

یادداشت. در مثال آخر، باید شرط‌های $a \geq 0$، $b \geq 0$ و $c > 0$ برقرار باشد. در $\sqrt[8]{a^5b^7}$، اگر به تنهایی در نظر گرفته شود، کافی است a و b هم علامت باشند ($ab \geq 0$) تا زیر رادیکال عددی منفی نشود. ولی وقتی $\sqrt[8]{a^6}$ و $\sqrt[8]{b^4}$ را به صورت $a^{\frac{3}{4}}$ (یعنی $\sqrt[4]{a^3}$) و $b^{\frac{1}{2}}$ (یعنی $\sqrt{b}$) نوشتیم، هریک از مقدارهای a و b باید غیر منفی باشند (در $\sqrt[8]{a^6}$، a می‌توانست منفی باشد، ولی وقتی آن را به صورت $\sqrt[4]{a^3}$ بنویسیم، a نمی‌تواند منفی باشد). به همین ترتیب، اگر c منفی باشد، نمی‌توان $\sqrt[8]{c^{20}}$ را به صورت $\sqrt{a^5}$ نوشت.

وقتی فرجهٔ رادیکال و نمای زیر رادیکال را بر عددی تقسیم می‌کنیم، ممکن است دامنهٔ عبارت تغییر کند: $\sqrt[4]{a^2}$ برای هر مقدار حقیقی a قابل قبول است، در حالی که اگر فرجهٔ رادیکال (یعنی ۴) و نمای زیر رادیکال (یعنی ۲) را بر ۲ تقسیم کنیم، به $\sqrt{a}$ می‌رسیم که تنها برای مقدارهای غیر منفی a قابل قبول است.

در واقع، برای ساده کردن $\sqrt[4]{a^2}$ باید نوشت:

اگر $a \geq 0$، آن وقت $\sqrt[4]{a^2} = \sqrt{a}$؛

اگر $a < 0$، آن وقت $\sqrt[4]{a^2} = \sqrt{-a}$.

به همین ترتیب، وقتی بخواهیم عددی را (که ضریب رادیکال است)، زیر رادیکال ببریم، باید به مثبت و منفی بودن آن توجه داشته باشیم:

$$2\sqrt{5} = \sqrt{2^2 \times 5} = \sqrt{20};$$
$$-2\sqrt{5} = -\sqrt{2^2 \times 5} = -\sqrt{20};$$
$$a\sqrt{5} = \begin{cases} \sqrt{5a^2} & a \geq 0 \\ -\sqrt{5a^2} & a < 0 \end{cases}$$

مثال ۴. ساده کنید:

$$1)\ a\sqrt{\frac{1}{a^2}}; \qquad 2)\ (2\sqrt{5} - 6)\sqrt{\frac{1}{6 - 2\sqrt{5}}};$$
$$3)\ \frac{1}{b}\sqrt[4]{a^2 b^2}; \quad 4)\ (a - b)\sqrt{\frac{1}{a^2 - 2ab + b^2}}$$

حل. ۱) دو حالت را به طور جداگانه در نظر می‌گیریم:

$$a\sqrt{\frac{1}{a^2}} = \begin{cases} \sqrt{\frac{a^2}{a^2}} = 1 & (a > 0) \\ -\sqrt{\frac{a^2}{a^2}} = -1 & (a < 0) \end{cases}$$

می‌توانستیم، به این صورت ساده کنیم:

$$a\sqrt{\frac{1}{a^2}} = \begin{cases} a \times \frac{1}{|a|} = \frac{a}{a} = 1 & (a > 0) \\ a \times \frac{1}{|a|} = -\frac{a}{a} = -1 & (a < 0) \end{cases}$$

۲) $۶ - ۲\sqrt{۵}$ عددی منفی است (چرا؟). بنابراین

$$(۲\sqrt{۵} - ۶)\sqrt{\frac{۱}{۶ - ۲\sqrt{۵}}} = -(۶ - ۲\sqrt{۵})\sqrt{\frac{۱}{۶ - ۲\sqrt{۵}}} =$$

$$= -\sqrt{\frac{(۶ - ۲\sqrt{۵})^۲}{۶ - ۲\sqrt{۵}}} = -\sqrt{۶ - ۲\sqrt{۵}} =$$

$$= -\sqrt{۵ - ۲\sqrt{۵} + ۱} = -\sqrt{(\sqrt{۵} - ۱)^۲} = ۱ - \sqrt{۵}$$

۳) $\sqrt[۴]{a^۳}$ نشان می‌دهد که $a \geq ۰$، ولی در $\sqrt[۴]{b^۲}$، b می‌تواند هر عدد حقیقی باشد، بنابراین

$$\frac{۱}{b}\sqrt[۴]{a^۳b^۲} = \begin{cases} \sqrt[۴]{\dfrac{a^۳b^۲}{b^۴}} = \sqrt[۴]{\dfrac{a^۳}{b^۲}} & (b > ۰) \\ -\sqrt[۴]{\dfrac{a^۳b^۲}{b^۴}} = -\sqrt[۴]{\dfrac{a^۳}{b^۲}} & (b < ۰) \end{cases}$$

۴) برای $a > b$ و $b > a$ دو جواب مختلف به دست می‌آید:

$$(a - b)\sqrt{\frac{۱}{(a - b)^۲}} = \begin{cases} ۱ & (a > b) \\ -۱ & (a < b) \end{cases}$$

مثال ۵. ساده کنید:

$$۱)\ ۲\sqrt{۲} - ۵\sqrt{۸} + \sqrt{۰/۵} + \sqrt{۵۰};$$

$$۲)\ \sqrt[۳]{۸۱} - \frac{۲}{۳}\sqrt[۶]{۱۶} - \frac{۲}{۹}\sqrt[۶]{۹} + ۲\sqrt[۳]{\frac{۱}{۹}} - ۵\sqrt[۳]{۲۵۶};$$

$$۳)\ \sqrt[۴]{\frac{۱}{x^۲y}} - \sqrt[۴]{\frac{x^۶}{y^۵}} - \sqrt[۴]{x^{۱۰}y^۷} + \sqrt[۴]{\frac{y^۳}{x^۶}}$$

حل.

$$۱)\ ۲\sqrt{۲}-۵\sqrt{۸}+\sqrt{۰/۵}+\sqrt{۵۰}=$$

$$=۲\sqrt{۲}-۵\sqrt{۴\times ۲}+\sqrt{\frac{۲}{۴}}+\sqrt{۲۵\times ۲}=$$

$$=۲\sqrt{۲}-۱۰\sqrt{۲}+\frac{۱}{۲}\sqrt{۲}+۵\sqrt{۲}=-\frac{۵}{۲}\sqrt{۲};$$

$$۲)\ \sqrt[۳]{۸۱}-\frac{۲}{۳}\sqrt[۶]{۱۶}-\frac{۲}{۹}\sqrt[۶]{۹}+۲\sqrt[۳]{\frac{۱}{۹}}-۵\sqrt[۳]{۲۵۶}=$$

$$=\sqrt[۳]{۲۷\times ۳}-\frac{۲}{۳}\sqrt[۶]{۴^۲}-\frac{۲}{۹}\sqrt[۶]{۳^۲}+۲\sqrt[۳]{\frac{۳}{۲۷}}-۵\sqrt[۳]{۶۴\times ۴}=$$

$$=۳\sqrt[۳]{۳}-\frac{۲}{۳}\sqrt[۳]{۴}-\frac{۲}{۹}\sqrt[۳]{۳}+\frac{۲}{۳}\sqrt[۳]{۳}-۲۰\sqrt[۳]{۴}=$$

$$=\left(۳-\frac{۲}{۹}+\frac{۲}{۳}\right)\sqrt[۳]{۳}+\left(-\frac{۲}{۳}-۲۰\right)\sqrt[۳]{۴}=\frac{۳۱}{۹}\sqrt[۳]{۳}-\frac{۶۲}{۳}\sqrt[۳]{۴}$$

۳) از عبارت مفروض درمی‌یابیم که y عددی مثبت است، ولی x می‌تواند مثبت یا منفی باشد. هریک از جمله‌ها را ساده می‌کنیم:

$$\sqrt[۴]{\frac{۱}{x^۲y}}=\sqrt[۴]{\frac{x^۲y^۳}{x^۴y^۴}}=\frac{۱}{|x|y}\sqrt[۴]{x^۲y^۳};$$

$$\sqrt[۴]{\frac{x^۶}{y^۵}}=\sqrt[۴]{\frac{x^۶y^۳}{y^۸}}=\frac{|x|}{y^۲}\sqrt[۴]{x^۲y^۳};$$

$$\sqrt[۴]{x^{۱۰}y^۷}=\sqrt[۴]{x^۸\cdot y^۴(x^۲y^۳)}=x^۲y\sqrt[۴]{x^۲y^۳};$$

$$\sqrt[۴]{\frac{y^۳}{x^۶}}=\sqrt[۴]{\frac{x^۲y^۳}{x^۸}}=\frac{۱}{x^۲}\sqrt[۴]{x^۲y^۳}$$

اگر حاصل عبارت مفروض را A بگیریم، به دست می‌آید:

$$\text{(الف)}\quad x > 0 \Rightarrow A = \left(\frac{1}{xy} - \frac{x}{y^2} - x^2 y + \frac{1}{x^2}\right)\sqrt[4]{x^2 y^3},$$

$$\text{(ب)}\quad x < 0 \Rightarrow A = \left(-\frac{1}{xy} + \frac{x}{y^2} - x^2 y + \frac{1}{x^2}\right)\sqrt[4]{x^2 y^3}$$

مثال ۶. به شرط $a > 0$ و $x > 0$، این عبارت را ساده کنید.

$$A = \sqrt[-2]{\frac{1}{4}a^2\sqrt{\frac{a}{x}}}\left[\frac{a}{2\sqrt{a}} \cdot \frac{x}{2\sqrt{x}} : \left(\sqrt[3]{\frac{a^2}{x}} \cdot a^{-1}\sqrt{x}\right)^6\right]$$

حل.

$$A = \sqrt[-4]{\frac{a^4}{16} \cdot \frac{a}{x}}\left[\frac{ax}{4\sqrt{ax}} : \left\{\left(\frac{a^2}{x}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{a} \cdot x^{\frac{1}{2}}\right\}^6\right] =$$

$$= \left(\frac{a^5}{16x}\right)^{-\frac{1}{4}}\left[\frac{ax}{4\sqrt{ax}} : \left\{\left(\frac{a^2}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{a^6} \cdot x^3\right\}\right] =$$

$$= \left(\frac{16x}{a^5}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \left[\frac{ax}{4\sqrt{ax}} : \frac{x}{a^2}\right] = \frac{2}{a}\sqrt[4]{\frac{x}{a}} \cdot \frac{a^3 x}{4x\sqrt{ax}} =$$

$$= \frac{2}{a}\sqrt[4]{\frac{x}{a}} \cdot \sqrt[4]{\frac{a^{12}}{4^4 a^2 x^2}} = \frac{2}{a}\sqrt[4]{\frac{a^9}{4^4 x}} =$$

$$= \frac{2a^2}{4a}\sqrt[4]{\frac{a}{x}} = \frac{a}{2}\sqrt[4]{\frac{ax^3}{x^4}} = \frac{a}{2x}\sqrt[4]{ax^3}$$

§۲. تابع نمایی

از این به بعد تکلیف ما، با عددهایی مثل $۲^{\frac{۳}{۲}}$ یا $۳^{-\frac{۱}{۲}}$ روشن است:

$$۲^{\frac{۳}{۲}} = \sqrt{۲^۳} = \sqrt{۸} = ۲/۸۲۸۴\ldots$$
$$۳^{-\frac{۱}{۲}} = \frac{۱}{۳^{\frac{۱}{۲}}} = \frac{۱}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۳} = ۰/۵۷۷۳\ldots$$

ولی با $۲^{\sqrt{۲۱}}$ چه باید کرد؟ $\sqrt{۲۱}$ تا سه رقم بعد از ممیز برابر است با ۴/۵۸۳. روشن است که

$$۲^{\sqrt{۲۱}} > ۲^۴ = ۱۶;$$
$$۲^{\sqrt{۲۱}} > ۲^{۴/۵} = ۲^{\frac{۹}{۲}} = ۲^۴ \times ۲^{\frac{۱}{۲}} = ۱۶\sqrt{۲} =$$
$$= ۱۶ \times ۱/۴۱۴\ldots \approx ۲۲/۶۲$$
$$۲^{\sqrt{۲۱}} > ۲^{۴/۵۸} = ۲^{\frac{۲۲۹}{۵۰}} = ۱۶\sqrt[۵۰]{۲^{۲۹}}$$

که در این‌جا متوقف می‌شویم، زیرا راهی برای محاسبهٔ $\sqrt[۵۰]{۲^{۲۹}}$ نمی‌شناسیم.

ولی به هر حال، با توجه به قراردادی که دربارهٔ نماهای کسری پذیرفتیم، عدد $۲^{\sqrt{۲۱}}$ هم معنا دارد و می‌توان مقدار آن را، با تقریبی دلخواه، محاسبه کرد، گرچه هنوز اطلاعی از شیوهٔ این محاسبه نداریم.

با وجود این، برای عددهای منفی، نمی‌توانیم نمای گنگ در نظر بگیریم. $(-۲)^{\sqrt{۲۱}}$ برای ما، معنایی ندارد. در واقع، اگر مقدار تقریبی $\sqrt{۲۱}$ را برابر ۴ بگیریم، حاصل $(-۲)^۴$ عددی مثبت می‌شود؛ ولی اگر $\sqrt{۲۱}$ را با یک رقم بعد از ممیز، یعنی ۴/۵ در نظر بگیریم، مقدار $(-۲)^{\sqrt{۲۱}}$ به تقریب برابر $(-۲)^{\frac{۹}{۲}}$ یعنی $\sqrt{(-۲)^۹}$ می‌شود که عددی موهومی است.

در حالت کلی، برای تابع $y = a^x$ (که به آن **تابع نمایی** گویند)، همیشه فرض بر مثبت بودن پایهٔ a است.

مثال ۷. *نمودار تابع $y = ۲^x$ را رسم کنید.*

حل. ۱) تابع $y = ۲^x$، محور $y'y$ را در نقطهٔ $(۰, ۱)$ قطع می‌کند.

۲) برای y، همیشه مقداری مثبت به دست می‌آید، بنابراین نمودار تابع، در ربع‌های اول و دوم دستگاه محورهای مختصات است.

۳) وقتی $x > ۰$، مقدار تابع، به سرعت بزرگ می‌شود:

$$x = ۲ \Rightarrow y = ۴;\ x = ۳ \Rightarrow y = ۸;\ x = ۴ \Rightarrow y = ۱۶; \ldots$$

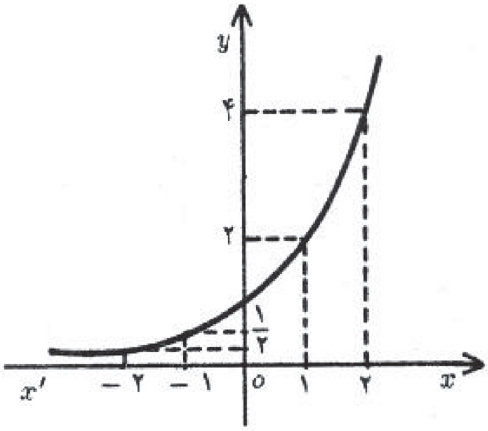
۴) برای $x < ۰$، وقتی قدر مطلق x بزرگ شود، مقدار y به سرعت کوچک می‌شود:

$$\left| \begin{matrix} x = -۱ \\ y = \frac{۱}{۲} \end{matrix} \right. ; \left| \begin{matrix} x = -۲ \\ y = \frac{۱}{۴} \end{matrix} \right. ; \left| \begin{matrix} x = -۳ \\ y = \frac{۱}{۸} \end{matrix} \right. ; \ldots ; \left| \begin{matrix} x = -۱۰ \\ y = \frac{۱}{۱۰۲۴} \end{matrix} \right. ; \ldots$$

بنابراین، نمودار تابع در ربع اول دستگاه محورهای مختصات، با آغاز از نقطهٔ $(۰, ۱)$ و عبور از نقطه‌های $(۱, ۲)$ و $(۲, ۴)$، با شیبی به طور نسبی زیاد، به سمت بالا می‌رود؛ و در ربع دوم دستگاه محورهای مختصات، با آغاز از نقطهٔ $(۰, ۱)$ و عبور از نقطه‌های $\left(-۱, \frac{۱}{۲}\right)$ و $\left(-۲, \frac{۱}{۴}\right)$ به طور دایم به محور $x'x$ (در جهت ox') نزدیک می‌شود، ولی هرگز به آن نمی‌رسد، مثل این است که در $-\infty$، با ox' ملاقات دارد. نمودار $y = ۲^x$ را در شکل ۳۶ می‌بینید.

یادداشت. نیم محور ox' را، در ریاضیات، **مجانب** منحنی تابع $y = ۲^x$ گویند، یعنی نیم‌خطی که در «جنب» منحنی پیش می‌رود.

اگر نقطه‌ای مثل M، با طول منفی، روی منحنی انتخاب کنیم و فاصلهٔ آن را تا خط راست $x'x$ با h نشان دهیم، هر چه قدرمطلق طول M بزرگتر شود، عدد h کوچکتر می‌شود، به نحوی که اگر مقدار طول نقطهٔ M به سمت $-\infty$ برود، مقدار h به سمت صفر می‌رود.



شکل ۳۶: نمودار تابع $y = ۲^x$

با مفهوم مجانب، تعریف دقیق آن و روش به دست آوردن آن، در جلدهای بعدی «ریاضیات محاسبه‌ای»، بیشتر و بهتر آشنا می‌شوید.

تمرین‌ها

۱۲۹. این کسرها را، به یاری نماهای منفی و کسری، به صورت یک عبارت بنویسید:

$$۱)\ \frac{\sqrt[۳]{(a+b)^{۷}c^{۴}}}{\sqrt[۵]{d^{۳}}\cdot\sqrt[۳]{a+x}};\quad ۲)\ \frac{\sqrt{a^{۲}-x^{۲}}}{\sqrt{a}\cdot\sqrt[۶]{m^{۵}}};$$

۱۳۰. حاصل این رادیکال‌ها را بنویسید:

$$۱)\ \sqrt[۵]{۳۲a^{۸}b^{۳}c^{۱۰}};\quad ۲)\ \frac{۲c}{۳}\sqrt[۴]{۸۱a^{۶}d^{۱۵}};$$

$$۳)\ \frac{a}{x}\sqrt[۳]{\frac{۲۷x^{۶}y^{۵}}{۱۲۵a^{۹}b^{۳}}};\quad ۴)\ \sqrt[n]{۳x^{۲n+۱}}$$

۱۳۱. این عبارت‌ها را ساده کنید:

$$۱)\ (۱/۵)^{۳}\cdot(۲/۲۵)^{۱/۵}\cdot(۰/۷۵)^{-۳};$$

$$۲)\ (۲/۲)^{-۲}\cdot(۷/۵)^{-۲}\cdot\left(\frac{۱۱}{۲۰}\right)^{۲}\cdot\left(\frac{۱}{۳}\right)^{-۲};$$

$$۳)\ ۴۲^{\frac{۱}{۲}} \cdot ۴۹^{\frac{۱}{۶}} \cdot ۴۹^{\frac{۱}{۲}} + ۱۹۶^{\frac{۱}{۳}};$$

$$۴)\ \frac{\sqrt{۱۲}}{\sqrt{۳}} + \frac{\sqrt{۱۵۳}}{\sqrt{۱۷}} - \frac{\sqrt{۳۰۴}}{\sqrt{۱۹}} + \frac{\sqrt{۱۳۳۱}}{\sqrt{۱۱}};$$

$$۵)\ \frac{a^{-۱} - n^{-۲}}{a^{-\frac{۱}{۴}} - n^{-\frac{۱}{۲}}} \cdot \frac{a^{\frac{۱}{۴}} - n^{\frac{۱}{۲}}}{a^{\frac{۱}{۴}} n^{\frac{۱}{۲}}}$$

۱۳۲. کدامیک از عددهای مثبت a و b، بزرگتر از دیگری است، به شرطی که

$$۱)\ ۱/۲^a > ۱/۲^b; \quad ۲)\ ۰/۸^a > ۰/۸^b; \quad ۳)\ \left(\frac{۱}{۵}\right)^a < \left(\frac{۱}{۵}\right)^b$$

۱۳۳. این معادله‌ها را حل کنید:

$$۱)\ ۲^x = ۲^{x^۲-۲}; \quad ۲)\ \left(\frac{۲}{۷}\right)^{۳x-۴} - \left(\frac{۴۹}{۴}\right)^{x-۱} = ۰;$$

$$۳)\ ۷^{۳x} + ۹ \times ۵^{۲x} = ۵^{۲x} + ۹ \times ۷^{۳x};$$

$$۴)\ ۳ \times ۲^{۲x} + ۳^{۲x+۳} = ۶ \times ۴^{x+۱} + \frac{۲}{۳} \times ۹^{x+۱};$$

$$۵)\ ۸^{۴(x^۳+۸)} = ۱۶^{۷(x^۲+۲x)};$$

$$۶)\ ۳۲^{۳(x^۳+۸)} = ۸^{۱۹(۲x+x^۲)};$$

$$۷)\ ۲^{۱۲x+۱} - ۴^{۶x-۱} + ۸^{۴x-۱} = ۷۶۸۰;$$

$$۸)\ \frac{۹}{۱۷(۴ \times ۲^x - ۳)} - \frac{۱}{۴(۲^x - \frac{۱}{۲})} + \frac{۲}{۱۷(۲^x - ۵)} = ۰;$$

$$۹)\ ۴^{\sqrt{۳x^۲-۲x}+۱} + ۸ = ۹ \times ۲^{\sqrt{۳x^۲-۲x}};$$

$$۱۰)\ \left(\sqrt[۳]{۳ + ۲\sqrt{۲}}\right)^x + \left(\sqrt[۳]{۳ - ۲\sqrt{۲}}\right)^x = ۲;$$

$$*۱۱)\ (\sqrt[۳]{x})^x = x^{\sqrt[۳]{x}} \qquad ۱۲)\ ۹^{\frac{x}{۲}} \times ۸^{\frac{x}{۳}} = ۳۶;$$

$۱۳)\ ۲۵^{|۱-۲x|} = ۵^{۴-۳x};$

$۱۴)\ (x^۲ - x + ۱)^{\frac{x^۲+۱}{۲}} = (x^۲ - x + ۱)^{۲x+۳};$

$۱۵)\ |x - ۱|^{x^۲+x-۲} = |x - ۱|^{۳x+۱۰};$

$*۱۶)\ ۳^x + ۴^x = ۵^x$

۱۳۴. نمودار این تابع‌ها را رسم کنید:

$$۱)\ y = -۲^x; \quad ۲)\ y = ۲^{-x}; \quad ۳)\ y = \left(\frac{۱}{۲}\right)^x$$

۷. دنباله‌های عددی و تصاعدها

§۱. دنبالهٔ عددی

در جلدهای اول و دوم «ریاضیات محاسبه‌ای» و از همان آغاز، ضمن تمرین‌ها، با مفهوم کلی دنبالهٔ عددی آشنا شده‌اید. دنباله، یکی از اساسی‌ترین مفهوم‌ها در ریاضیات است و، به تعبیری، جدی‌ترین مفهوم‌های ریاضیات عالی، بر پایهٔ آن ساخته شده است.

دنبالهٔ عددی، به مجموعهٔ مرتبی از عددها گفته می‌شود که به دنبال هم آمده‌اند. هر عدد از دنباله را، **عضو** یا **جملهٔ دنباله** گویند: جملهٔ اول، جملهٔ پنجم، جملهٔ صدم، جملهٔ nام.

همان‌طور که می‌بینید، جمله‌های دنباله (که معمولاً آن‌ها را با $u_۱$، $u_۲$، $u_۳$، ...، u_n، ... نشان می‌دهند)، با عددهای طبیعی ۱، ۲، ۳، ...، n، ... مشخص می‌شوند و، بنابراین، دامنهٔ دنبالهٔ عددی، مجموعهٔ عددهای طبیعی است. u_n را **جملهٔ** nام یا **جملهٔ عمومی** دنباله گویند.

مثال ۱. دنبالهٔ عددهای مثبت بخش‌پذیر بر ۷، چنین است:

$$۷, ۱۴, ۲۱, ۲۸, \ldots$$

جملهٔ عمومی این دنباله، به صورت $\text{۷}n$ درمی‌آید، که اگر در آن، مقدار n را به ترتیب برابر ۱، ۲، ۳، ... بگیریم، جمله‌های پشت سر هم دنباله به دست می‌آید. مثلاً جمله نودوهفتم این دنباله برابر است با:

$$\text{۹۷} \times \text{۷} = \text{۶۷۹}$$

مثال ۲. *اگر بدانیم، جملهٔ عمومی یک دنباله* $u_n = n^{\text{۲}} + n$ *است، ده جملهٔ اول این دنباله را بنویسید.*

حل. اگر در جملهٔ عمومی، به جای n، به ترتیب، عددهای طبیعی از ۱ تا ۱۰ را قرار دهیم، ده جملهٔ نخست این دنباله به دست می‌آید:

$$\text{۲}, \text{۶}, \text{۱۲}, \text{۲۰}, \text{۳۰}, \text{۴۲}, \text{۵۶}, \text{۷۲}, \text{۹۰}, \text{۱۱۰}$$

یادداشت. هریک از دنباله‌های مثال ۱ و مثال ۲ را می‌توان به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب نشان داد. برای دنبالهٔ عددهای مثبت مضرب ۷:

$$\{(\text{۱}, \text{۷}), (\text{۲}, \text{۱۴}), (\text{۳}, \text{۲۱}), (\text{۴}, \text{۲۸}), \ldots, (n, \text{۷}n), \ldots\}$$

و برای دنبالهٔ با جملهٔ عمومی $u_n = n^{\text{۲}} + n$:

$$\{(\text{۱}, \text{۲}), (\text{۲}, \text{۶}), (\text{۳}, \text{۱۲}), (\text{۴}, \text{۲۰}), \ldots, (n, n^{\text{۲}} + n), \ldots\}$$

هریک از این دو مجموعه، معرف یک تابع است، زیرا در آن‌ها، عددهای طبیعی مختلف، متناظر با جمله‌های مختلفی از دنباله‌اند.

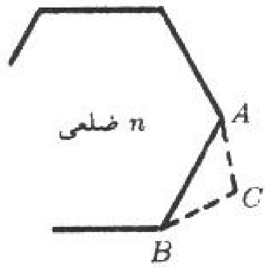
یادداشت ۲. دنباله‌های مثال ۱ و مثال ۲، بی‌پایان‌اند، یعنی بی‌نهایت جمله دارند. دنباله می‌تواند باپایان باشد، مثل دنبالهٔ عددهای طبیعی اول و کوچکتر از ۲۰:

$$\text{۲}, \text{۳}, \text{۵}, \text{۷}, \text{۱۱}, \text{۱۳}, \text{۱۷}, \text{۱۹}$$

یادداشت ۳. بسته به شرط مساله، ممکن است جملهٔ اول دنباله، به جای $n = ۱$ (در جملهٔ عمومی) از $n = ۰$ یا $n = k$ آغاز شود. در حالت اول، یعنی وقتی نخستین جمله را به ازای $n = ۰$ در نظر بگیریم، u_n نمایندهٔ جملهٔ $(n + ۱)$ام می‌شود. مثلاً اگر در دنبالهٔ با جملهٔ عمومی $u_n = n^۲ + ۱$، جملهٔ اول را به‌ازای $n = ۰$ در نظر بگیریم $(u_۱ = ۱)$، آن وقت $n^۲ + ۱$ نمایندهٔ جملهٔ $(n + ۱)$ام است. ولی، معمول این است که، به طور طبیعی، u_n را نمایندهٔ جملهٔ nام فرض کنیم.

***مثال ۳.** *اگر داشته باشیم $n > ۱۱$ و بدانیم عدد n، معرف تعداد ضلع‌های یک چندضلعی کوژ (محدب) است.* تعداد قطرهای این چندضلعی‌ها را، به صورت یک دنبالهٔ عددی بنویسید.

حل. روشن است که، برای $n = ۳$ (یعنی مثلث)، تعداد قطرها برابر است با ۰ (مثلث، قطر ندارد $u_۳ = ۰$). برای $n = ۴$ (چهارضلعی کوژ)، تعداد قطرها برابر است با ۲ $(u_۴ = ۲)$. می‌بینید، در این دنباله، باید از $n = ۳$ آغاز کرد (نه از $n = ۱$). می‌توان به همین ترتیب، پنج‌ضلعی کوژ شش‌ضلعی کوژ و غیره را، روی صفحهٔ کاغذ در نظر گرفت، همهٔ قطرها را رسم کرد و، سپس، آنها را شمرد. ولی، به‌جز این که این روش (یعنی روش آزمایشی) کاری خسته کننده است و، با زیاد شدن تعداد ضلع‌ها، امکان اشتباه بیشتر می‌شود، روشی ریاضی نیست. روش ریاضی، یعنی پیدا کردن قانونی یا دستوری که، به یاری آن، بتوان جمله‌های پشت سر هم دنباله را، بدون اشتباه و با کمترین عمل‌ها به دست آورد. به شکل ۳۷ توجه کنید. برای این که nضلعی به $(n + ۱)$ ضلعی تبدیل شود، می‌توان یکی از ضلع‌های آن، و مثلاً ضلع AB را کنار گذاشت. و به جای آن، دو ضلع AC و BC را در نظر گرفت. ببینیم، تعداد قطرها (وقتی nضلعی به $n + ۱$ ضلعی تبدیل می‌شود) چه فرقی می‌کند. تعداد قطرهای nضلعی را u_n و تعداد قطرهای $n + ۱$ ضلعی را $u_{n+۱}$ می‌نامیم.



شکل ۳۷

۱) همهٔ قطرهای nضلعی، قطرهایی از $n+۱$ ضلعی هستند؛

۲) پاره‌خط راست AB (ضلع nضلعی) به قطری از $n+۱$ ضلعی تبدیل می‌شود؛

۳) اگر از راس تازهٔ C در $n+۱$ضلعی، به هر راس nضلعی، به‌جز دو راس A و B، وصل کنیم، $n-۲$ قطر تازه برای $n+۱$ضلعی به دست می‌آید. بنابراین

$$u_{n+۱} = u_n + ۱ + (n - ۲) = u_n + n - ۱ \qquad (*)$$

دستور $u_{n+۱} = u_n + n - ۱$ را **دستور یا رابطهٔ برگشتی** گویند. به یاری این دستور می‌توان، هر جملهٔ دنباله را از روی جملهٔ قبل از آن به دست آورد.

در مثال ۳، می‌دانیم $u_۳ = ۰$، پس

$$u_۴ = ۰ + ۳ - ۱ = ۲$$

(تعداد قطرهای چهارضلعی کوژ برابر است با ۲) و سپس

$$u_۵ = u_۴ + ۴ - ۱ = ۲ + ۳ = ۵;$$

$$u_۶ = u_۵ + ۵ - ۱ = ۹;$$

$$u_۷ = u_۶ + ۶ - ۱ = ۱۴;$$

$$u_۸ = u_۷ + ۷ - ۱ = ۲۰;$$

$$u_{۹} = u_{۸} + ۸ - ۱ = ۲۷;$$
$$u_{۱۰} = u_{۹} + ۹ - ۱ = ۳۵$$

و دنبالهٔ مورد نظر مساله چنین است (با آغاز از سه ضلعی) :

$$۰, ۲, ۵, ۹, ۱۴, ۲۰, ۲۷, ۳۵$$

یادداشت. دستور (*) را، برای محاسبهٔ تعداد قطرهای یک nضلعی، به این دلیل آورده‌ایم که با مفهوم دستور برگشتی آشنا شویم. ولی دستور برگشتی نمی‌تواند، به طور مستقیم، تعداد قطرهای یک nضلعی را به ما بدهد. مثلاً، اگر بخواهید با این دستور، تعداد قطرهای بیست ضلعی را پیدا کنید، باید تعداد قطرهای ۱۹ضلعی را بدانید و، برای تعداد قطرهای ۱۹ضلعی، به تعداد قطرهای ۱۸ضلعی نیاز دارید و غیره. به این ترتیب، کار محاسبه طولانی و خسته کننده می‌شود و، به دلیل طولانی بودن محاسبه، احتمال اشتباه بیشتر می‌شود. در حالی که اگر بتوانیم دستوری به دست آوریم که تعداد قطرهای یک nضلعی را بر حسب n (تعداد ضلع‌ها) به ما بدهد، با محاسبه‌ای آسان و سریع سروکار پیدا خواهیم کرد. و این دستور را، دربارهٔ تعداد قطرهای یک nضلعی کوژ، می‌توان به سادگی به دست آورد. در این‌جا، با سه روش، این دستور را پیدا می‌کنیم.

۱) n نقطه روی صفحه در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم، هیچ سه نقطه‌ای روی یک خط راست نباشند. اگر این n نقطه را دو به دو به هم وصل کنیم، چند پاره‌خط راست به دست می‌آید؟

هر نقطه را می‌توان به $(n - ۱)$ نقطهٔ دیگر وصل کرد، بنابراین روی هم، به تعداد $n(n - ۱)$ پاره‌خط راست به دست می‌آید. ولی چون هر پاره‌خط راست دارای دو انتها است، در این محاسبه، هر پاره‌خط راست، دو بار به حساب آمده است: یعنی تعداد پاره‌خط‌های راستی که n نقطه را دو به دو به

هم وصل می‌کنند، برابر است با $\frac{1}{2}n(n-1)$. اکنون، اگر این n نقطه را راس‌های یک nضلعی کوژ در نظر بگیریم، این پاره‌خط‌های راست عبارتند از ضلع‌ها و قطرهای nضلعی و اگر تعداد ضلع‌ها (یعنی n) را از آن کم کنیم، تعداد قطرهای nضلعی به دست می‌آید. اگر تعداد قطرهای nضلعی را u_n بنامیم:

$$u_n = \frac{1}{2}n(n-1) - n = \frac{1}{2}n(n-3)$$

۲) به طور مستقیم به سراغ تعداد قطرها می‌رویم. اگر در nضلعی، یک راس را انتخاب کنیم، با وصل کردن آن به $(n-3)$ راس، قطرهایی از nضلعی به دست می‌آید که از این راس گذشته‌اند (برای پدید آمدن قطر، نمی‌توان این راس را به خودش یا به دو راس مجاورش وصل کرد). به این ترتیب، از n راس، به تعداد $n(n-3)$ قطر می‌گذرد. چون هر قطر مربوط به دو راس است و دو بار به حساب آمده است، تعداد قطرهای nضلعی چنین می‌شود:

$$u_n = \frac{1}{2}n(n-3)$$

۳) به یاری دستور برگشتی (*) هم، می‌توان u_n را بر حسب n پیدا کرد. دستور برگشتی را، این طور می‌نویسیم:

$$u_{n+1} - u_n = n - 1$$

اگر در این دستور، به جای n، به ترتیب عددهای ۳، ۴، ... ، $n-1$ را قرار دهیم، به دست می‌آید:

$$u_4 - u_3 = 2$$

$$u_5 - u_4 = 3$$

$$u_6 - u_5 = 4$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$u_n - u_{n-1} = n - 2$$

که از مجموع آن‌ها، خواهیم داشت:

$$u_n - u_3 = 2 + 3 + 4 + \dots + n - 2$$

که چون $2 + 3 + \dots + (n-2) = \frac{1}{2}n(n-3)$ (چرا؟) و $u_3 = 0$،
بنابراین:

$$u_n = \frac{1}{2}n(n-3)$$

□

همین قدر یادآوری می‌کنیم که، جمله‌های یک دنباله، ممکن است به جای عدد، تابع‌هایی از یک متغیر یا چند متغیر باشند. به عنوان نمونه، دنباله‌ای را در نظر می‌گیریم که جملهٔ عمومی آن، به این صورت داده شده باشد:

$$u_n = \frac{n}{(n+1)x^2 + (n+2)} \quad (n \in \mathrm{N})$$

در این صورت، جمله‌های دنباله، چنین‌اند:

$$\frac{1}{2x^2+3}, \frac{2}{3x^2+4}, \frac{3}{4x^2+5}, \frac{4}{5x^2+6}, \dots$$

§۲. تصاعد حسابی

۱. **تعریف.** دنباله‌ای که اختلاف هر دو جملهٔ متوالی آن، مقدار ثابتی باشد، **تصاعد حسابی** یا **تصاعد عددی** نام دارد و، این اختلاف ثابت را، **قدر نسبت** آن گویند. دنبالهٔ عددهای طبیعی

$$1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots \qquad (*)$$

یک تصاعد حسابی تشکیل می‌دهند. در تصاعد حسابی (*)، جملهٔ اول $a_1 = 1$، قدر نسبت $d = 1$ و جملهٔ nام $a_n = n$ است.

در این‌جا، چند نمونه از تصاعد حسابی داده شده است (منظور از a_1، جملهٔ اول تصاعد و منظور از d، قدر نسبت آن است):

$$11, 15, 19, 23, \ldots (a_1 = 11, d = 4);$$

$$5, 3, 1, -1, \ldots (a_1 = 5, d = -2);$$

$$x, x + a, x + 2a, \ldots (a_1 = x, d = a)$$

۲. جملهٔ nام تصاعد حسابی. تصاعدی حسابی، با جملهٔ اول a_1 و قدر نسبت d در نظر می‌گیریم:

a_1	,	$a_1 + d$	,	$a_1 + 2d$	, ...,	$a_1 + (n-1)d$
$\downarrow$		$\downarrow$		$\downarrow$		$\downarrow$
جملهٔ اول		جملهٔ دوم		جملهٔ سوم		جملهٔ nام

به این ترتیب، اگر جملهٔ nام تصاعد حسابی را a_n بنامیم، به این دستور می‌رسیم:

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d} \qquad (1)$$

که در آن، a_1 جملهٔ اول، d قدر نسبت و n تعداد جمله‌های تصاعد است.

مثال ۴. *در دنبالهٔ عددهای طبیعی، چهل‌وپنجمین عددِ بخش‌پذیر بر ۳ و ۷ را پیدا کنید.*

حل. نخستین عدد طبیعیِ بخش‌پذیر بر ۳ و ۷، عدد ۲۱ است. در ضمن، هر عدد مضرب ۲۱، بر ۳ و ۷ بخش‌پذیر است. دنبالهٔ عددهای طبیعی بخش‌پذیر بر ۳ و ۷، تشکیل یک تصاعد حسابی می‌دهند که، در آن، $a_1 = 21$ و $d = 21$.

$$21, 42, 63, 84, 105, \ldots$$

دستور (۱)، جملهٔ چهل‌وپنجم این تصاعد را به ما می‌دهد:

$$a_{۴۵} = a_{۱} + (n - ۱)d =$$
$$= ۲۱ + (۴۵ - ۱)۲۱ = ۲۱ \times ۴۵ = ۹۴۵$$

مثال ۵. *در یک تصاعد حسابی، جملهٔ اول $a_{۱} = ۵$ و قدر نسبت $d = \frac{۱}{۴}$. نخستین جمله‌ای از این تصاعد که بر ۱۷ بخش‌پذیر باشد، جملهٔ چندم است؟*

حل. فرض می‌کنیم، جملهٔ nام، نخستین جمله‌ای از تصاعد باشد که بر ۱۷ بخش‌پذیر است. بنابر دستور (۱) داریم:

$$a_n = ۵ + (n - ۱) \times \frac{۱}{۴}$$

a_n بر ۱۷ بخش‌پذیر و، بنابراین، عددی درست است. درنتیجه، باید عدد $\frac{۱}{۴}(n - ۱)$ عدد درستی باشد، آن را برابر k می‌گیریم:

$$\frac{۱}{۴}(n - ۱) = k \Rightarrow n = ۴k + ۱$$

و از آن‌جا

$$a_n = ۵ + (۴k + ۱ - ۱) \times \frac{۱}{۴} = ۵ + k$$

نخستین عدد درستی که می‌توان به جای k قرار داد تا $۵ + k$ بر ۱۷ بخش‌پذیر باشد، عبارت است از $k = ۱۲$، یعنی

$$n = ۴k + ۱ = ۴ \times ۱۲ + ۱ = ۴۹$$

چهل و نهمین جملهٔ این تصاعد، برابر ۱۷ و بر ۱۷ بخش‌پذیر است.

مثال ۶. *عددهای ۱۱، ۴۴ و ۷۰۴، جمله‌هایی از یک تصاعد حسابی هستند که، قدر نسبت آن، عددی درست است. قدر نسبت این تصاعد را پیدا کنید.*

حل. فرض می‌کنیم ۱۱ جملهٔ اول، ۴۴ جملهٔ nام و ۷۰۴ جملهٔ mام تصاعد حسابی باشند. اگر قدر نسبت تصاعد را d بگیریم، باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} ۴۴ = ۱۱ + (n-۱)d \\ ۷۰۴ = ۱۱ + (m-۱)d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (n-۱)d = ۳۳ \\ (m-۱)d = ۶۹۳ \end{cases}$$

که از تقسیم برابری دوم بر برابری اول به دست می‌آید:

$$\frac{m-۱}{n-۱} = ۲۱ \Rightarrow m = ۲۱n - ۲۰ \qquad (*)$$

درضمن از برابری $(n-۱)d = ۳۳$، به دست می‌آید:

$$d = \frac{۳۳}{n-۱} \qquad (**)$$

برای این‌که از تقسیم عدد ۳۳ بر $n-۱$، عددی درست (و در این‌جا مثبت) به دست آید، باید $n-۱$ برابر ۱ یا ۳ یا ۱۱ و یا ۳۳ باشد. درنتیجه، n می‌تواند برابر یکی از عددهای ۲، ۴، ۱۲ و یا ۳۴ باشد، با در دست داشتن مقدار n، می‌توان m را از برابری $(*)$ و d را از برابری $(**)$ به دست آورد.

در جدول زیر، مقدارهای متناظر d و n و m داده شده است:

d	۳۳	۱۱	۳	۱
n	۲	۴	۱۲	۳۴
m	۲۲	۶۴	۲۳۱	۶۹۴

و تصاعدهای متناظر (به شرط این‌که جملهٔ اول را برابر ۱۱ فرض کنیم) چنین‌اند.

۱) ۱۱, ۴۴, ۷۷, ..., ۶۷۱, ۷۰۴:

$$۲)\ ۱۱, ۲۲, ۳۳, \ldots, ۶۹۳, ۷۰۴;$$

$$۳)\ ۱۱, ۱۴, ۱۷, \ldots, ۷۰۱, ۷۰۴;$$

$$۴)\ ۱۱, ۱۲, ۱۳, \ldots, ۷۰۳, ۷۰۴$$

اگر همین چهار تصاعد را، از آخر به اول بنویسیم، چهار تصاعد حسابی دیگر، با قدر نسبت‌های منفی به دست می‌آید:

پاسخ. ±۱، ±۳، ±۱۱، ±۳۳.

مثال ۷. می‌دانیم دنبالهٔ n عدد مثبت

$$a_۱, a_۲, a_۳, \ldots, a_n \qquad (۱)$$

تشکیل یک تصاعد حسابی داده‌اند. این مجموع را محاسبه کنید.

$$S = \frac{۱}{\sqrt{a_۲} + \sqrt{a_۱}} + \frac{۱}{\sqrt{a_۳} + \sqrt{a_۲}} + \ldots + \frac{۱}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n-۱}}}$$

حل. اگر قدر نسبت تصاعد (۱) را d بنامیم، به ترتیب داریم:

$$\frac{۱}{\sqrt{a_۲} + \sqrt{a_۱}} = \frac{\sqrt{a_۲} - \sqrt{a_۱}}{a_۲ - a_۱} = \frac{۱}{d}(\sqrt{a_۲} - \sqrt{a_۱}),$$

$$\frac{۱}{\sqrt{a_۳} + \sqrt{a_۲}} = \frac{\sqrt{a_۳} - \sqrt{a_۲}}{a_۳ - a_۲} = \frac{۱}{d}(\sqrt{a_۳} - \sqrt{a_۲}),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{۱}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n-۱}}} = \frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n-۱}}}{a_n - a_{n-۱}} = \frac{۱}{d}(\sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n-۱}})$$

که از مجموع آن‌ها به دست می‌آید:

$$S = \frac{۱}{d}(\sqrt{a_n} - \sqrt{a_۱})$$

***مثال ۸.** اگر جسمی را از یک بلندی رها کنیم تا به صورت آزاد سقوط کند، سرعت سقوط آن، در هر لحظه نسبت به لحظهٔ قبل بیشتر می‌شود. اگر سرعت‌های حرکت جسم در حالت سقوط آزاد، در فاصلهٔ زمان‌های متوالی برابر، تشکیل یک تصاعد حسابی بدهند و بدانیم در ثانیه اول مسافتی برابر ۴/۹ متر پیموده است، سرعت جسم را در پایان هر یک دهم ثانیه و در پایان ثانیه‌های دوم، سوم و چهارم پیدا کنید.*

حل. جسمی که از یک بلندی رها شود، در آغاز حرکت، سرعتی برابر صفر دارد؛ چون در ثانیهٔ اول ۴/۹ متر سقوط کرده است، بنابراین سرعت متوسط جسم در ثانیهٔ اول، ۴/۹ متر در ثانیه بوده است. اگر سرعت جسم را در پایان ثانیهٔ اول برابر v بگیریم، باید داشته باشیم:

$$\frac{۰ + v}{۲} = ۴/۹ \Rightarrow v = ۹/۸$$

جسم در پایان ثانیهٔ اول، به سرعت ۹/۸ متر در ثانیه رسیده است.

سرعت‌ها، در فاصلهٔ زمان‌های برابر، به تصاعد حسابی هستند. یک ثانیه ۱۰ برابر یک دهم ثانیه است. بنابراین دنباله‌ای شامل ۱۱ عدد داریم که تشکیل تصاعد حسابی می‌دهند. جملهٔ اول تصاعد $a_۱ = ۰$ و جملهٔ یازدهم آن، $a_{۱۱} = ۹/۸$، بنابراین

$$۹/۸ = ۰ + (۱۱ - ۱)d \Rightarrow d = ۰/۹۸$$

و سرعت‌ها در پایان هر یک دهم ثانیه، چنین‌اند (تا پایان ثانیهٔ اول):

$$۰, ۰/۹۸, ۱/۹۶, ۲/۹۴, \ldots, ۹/۸$$

و چون سرعت‌ها در فاصلهٔ زمان‌های برابر به تصاعد حسابی‌اند، برای یک دهم ثانیه‌های بعدی هم، همین تصاعد ادامه پیدا می‌کند و سرعت جسم در

حال سقوط آزاد، در پایان ثانیهٔ دوم، به $۹/۸ \times ۲$، در پایان ثانیهٔ سوم به $۹/۸ \times ۳$ و غیره می‌رسد.

اگر جسم، بعد از t ثانیه به زمین برسد، سرعت آن در لحظهٔ رسیدن به زمین، برابر $۹/۸t$ خواهد شد.

مسافت‌هایی را که جسم در ثانیه‌های متوالی می‌پیماید، عبارتند از

$$۴/۹,\ ۴/۹+۹/۸,\ ۴/۹+۲\times ۹/۸,\ ۴/۹+۳\times ۹/۸,\dots$$

که خود تشکیل یک تصاعد حسابی با جملهٔ اول ۴/۹ و قدر نسبت ۹/۸ می‌دهند.

۳. میانگین حسابی. اگر سه مقدار a، b و c به تصاعد حسابی باشند، یعنی داشته باشیم:

$$b-a=c-b \Rightarrow b=\frac{a+c}{۲}$$

آن وقت، b، میانگین حسابی (یا واسطهٔ عددی) a و c است.

میانگین حسابی را برای چند مقدار هم می‌توان تعریف کرد:

میانگین حسابی n عدد $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n، برابر است با $\frac{۱}{n}$ مجموع آن‌ها:

$$\frac{a_۱+a_۲+\dots+a_n}{n}$$

مثلاً میانگین حسابی دو عدد ۲− و ۸ برابر است با

$$\frac{-۲+۸}{۲}=۳$$

و میانگین حسابی کمیت‌های a ، $۲a$ و $۴-۳a$:

$$\frac{a+۲a+(۴-۳a)}{۳}=\frac{۴}{۳}$$

۴. مجموع جمله‌های یک تصاعد حسابی با پایان. در آغاز به یک ویژگی از تصاعد حسابی با پایان توجه کنید:

مجموع هر دو جمله از تصاعد حسابی، که از جمله‌های اول و آخر به یک فاصله باشند، مقدار ثابتی است؛ یعنی، مجموع دو جملهٔ اول و آخر، برابر است با مجموع جمله‌های دوم و یکی مانده به آخر و غیره. اگر جملهٔ اول تصاعد را a، قدر نسبت را d و تعداد جمله‌ها را n فرض کنیم، آن وقت مجموع جمله‌های اول و آخر

$$a + [a + (n - ۱)d] = ۲a + (n - ۱)d$$

و مجموع دو جملهٔ دوم و یکی مانده به آخر

$$(a + d) + [a + (n - ۲)d] = ۲a + (n - ۱)d$$

و به طور کلی، مجموع دو جملهٔ kام و k جمله به آخر

$$[a + (k - ۱)d] + [a + ((n - k + ۱) - ۱)]d = ۲a + (n - ۱)d$$

در حالتی که n، یعنی تعداد جمله‌های تصاعد، عددی فردباشد، این مجموع ثابت، برابر است با دو برابر جملهٔ وسط. در واقع، این مجموع ثابت، برابر است با میانگین حسابی n جملهٔ تصاعد.

به این ترتیب، می‌توان مجموع n جمله از تصاعد حسابی را، به سادگی محاسبه کرد. اگر جملهٔ اول تصاعد برابر $a_۱$ و جمله nام آن برابر a_n باشد، آن وقت $\frac{۱}{۲}(a_۱ + a_n)$ میانگین حسابی n جمله است و، در نتیجه، مجموع n جمله چنین می‌شود:

$$\boxed{S_n = \frac{n}{۲}(a_۱ + a_n)} \qquad (I)$$

(مجموع را، به این دلیل با S_n نشان داده‌ایم که بتواند معرف مجموع n جمله از تصاعد باشد.) که، با توجه به دستور محاسبه a_n، می‌توان دستور محاسبهٔ مجموع n جمله از تصاعد حسابی را، این طور نوشت (d، قدر نسبت تصاعد است):

$$\boxed{S_n = \frac{n}{۲}[۲a_۱ + (n-۱)d]} \qquad (\mathrm{II})$$

مثال ۹. *چند نفر پذیرفتند کاری را با هم انجام دهند. اگر این چند نفر، با هم کار را آغاز می‌کردند می‌توانستند بعد از ۲۴ ساعت کار را تمام کنند ولی در آغاز، تنها یک نفر شروع به کار کرد و در فاصلهٔ زمان‌های برابر، یکی یکی به او اضافه شدند؛ دومی مدتی دیرتر از اولی، سومی به همان اندازه دیرتر از دومی، چهارمی به همان اندازه دیرتر از سومی و غیره. در ضمن روشن شد، زمان کار اولی ۱۱ برابر زمان کار آخری است. نفر آخر، چند ساعت کار کرده است؟*

حل. اگر نفر آخر a ساعت کار کرده باشد، مدت کار نفر اول $۱۱a$ ساعت می‌شود. اگر تعداد افراد را b بگیریم، از آن‌جا که تفاوت ساعت‌های کار هر فرد، نسبت به فرد قبل از خودش، مقدار ثابتی است، با یک تصاعد حسابی سروکار داریم که جملهٔ اول آن $۱۱a$، جملهٔ آخر a و تعداد جمله‌ها برابر b است. بنابراین برای پیدا کردن تعداد کل ساعت‌های کار (که همهٔ افراد روی هم مشغول بوده‌اند)، باید مجموع جمله‌های این تصاعد حسابی را، با استفاده از دستور (I) به دست آوریم:

$$\text{تعداد ساعت‌های کار} = \frac{(a + ۱۱a)b}{۲} = ۶ab$$

از طرف دیگر می‌دانیم، اگر b نفر با هم کار را آغاز می‌کردند، کار در ۲۴ ساعت تمام می‌شد، یعنی برای انجام کار، به $۲۴b$ ساعت کار نیاز است. از

این‌جا باید داشته باشیم:

$$۶ab = ۲۴b \Rightarrow a = ۴$$

(چون $b \neq ۰$، توانستیم دو طرف برابری را بر b تقسیم کنیم). نفر آخر ۴ ساعت و نفر اول ۴۴ ساعت کار کرده‌اند.

تعداد افراد (یعنی b یا تعداد جمله‌های تصاعد) را نمی‌توان به دست آورد، مگر این‌که‌مساله‌شرط دیگری را هم داده باشد. مثلاً، اگر هر نفر ۸ ساعت بعد از دیگری وارد کار شود $b = ۶$، اگر فاصلهٔ زمانی هر دو نفر ۴ ساعت باشد $b = ۱۱$ و اگر این فاصلهٔ زمانی (یعنی قدر نسبت تصاعد) ۲ ساعت باشد $b = ۲۱$ خواهد شد (خودتان محاسبه کنید).

مثال ۱۰. *محصول تولید لوله‌های فولادی کارخانه‌ای، در آغاز سال ۱۳۶۸ تا پایان سال ۱۳۷۱، برابر ۱۱ میلیون تن بوده است. میزان تولید کارخانه را در هر سال پیدا کنید، به شرطی که بدانیم، تولید لوله‌های فولادی، هر سال افزایش ثابتی داشته است؛ در ضمن در دو سال آخر این دوره، ۱/۲ میلیون تن لوله، بیش از دو سال اول این دوره تولید شده باشد.*

حل. میزان تولید لوله‌های فولادی در کارخانه را در سال ۱۳۶۸، برابر a تن می‌گیریم و فرض می‌کنیم، تولید هر سال، نسبت به سال قبل، d تن افزایش یابد. در این صورت، تولید این چهار سال، بر حسب تن، چنین است:

$$a,\ a + d,\ a + ۲d,\ a + ۳d$$

میزان تولید در دو سال آخر برابر $۲a + ۵d$ و در دو سال اول برابر $۲a + d$ تن است، بنابراین

$$(۲a + ۵d) - (۲a + d) = ۱/۲ \Rightarrow d = ۰/۳$$

چون مجموع تولید چهار سال کارخانه برابر ۱۱ تن است، پس

$$a + (a + d) + (a + ۲d) + (a + ۳d) = ۱۱;$$

$$۴a + ۶d = ۱۱ \Rightarrow ۴a + ۶ \times ۰/۳ = ۱۱$$

از آن‌جا $a = ۲/۳$؛ و تولید کارخانه، در این چهار سال، به ترتیب، چنین است:

$$۲/۳,\ ۲/۶,\ ۲/۹,\ ۳/۲$$

مثال ۱۱. *تصاعدی حسابی با جملهٔ اول برابر* $-\frac{۱}{۳}$ *پیدا کنید که مجموع پنج جملهٔ اول آن، یک چهارم مجموع پنج جملهٔ بعدی باشد.*

حل. قدر نسبت تصاعد را d، مجموع ۵ جملهٔ اول را $S_۵$ و مجموع ۱۰ جملهٔ اول را $S_{۱۰}$ می‌نامیم. در این صورت، باید داشته باشیم:

$$S_۵ = \frac{۱}{۴}(S_{۱۰} - S_۵) \Rightarrow S_{۱۰} = ۵S_۵$$

از طرف دیگر داریم:

$$S_۵ = \frac{۵}{۲}\left[-\frac{۱}{۳} + \left(-\frac{۱}{۳} + ۴d\right)\right] = ۵\left(-\frac{۱}{۳} + ۲d\right);$$

$$S_{۱۰} = \frac{۱۰}{۲}\left[-\frac{۱}{۳} + \left(-\frac{۱}{۳} + ۹d\right)\right] = ۵\left(-\frac{۲}{۳} + ۹d\right)$$

از آن‌جا

$$۵\left(-\frac{۲}{۳} + ۹d\right) = ۲۵\left(-\frac{۱}{۳} + ۲d\right) \Rightarrow d = ۱$$

و چند جملهٔ نخست تصاعد چنین است:

$$-\frac{۱}{۳}, \frac{۲}{۳}, \frac{۵}{۳}, \frac{۸}{۳}, \frac{۱۱}{۳}, \frac{۱۴}{۳}, \frac{۱۷}{۳}, \ldots$$

مثال ۱۲. *مجموع همهٔ عددهای مثبت و کوچکتر از ۱۰۰۰ را پیدا کنید که، در تقسیم هریک از آن‌ها بر ۱۱ ، باقی‌مانده‌ای برابر ۵ به دست آید.*

حل. عددهایی را، که در تقسیم بر ۱۱ به باقی‌ماندهٔ ۵ برسند، می‌توان به صورت $11k + 5$ نشان داد؛ این عددها باید مثبت و کوچکتر از ۱۰۰۰ باشند:

$$0 < 11k + 5 < 1000 \Rightarrow 0 \leq k \leq 90$$

بنابراین، عددهای مورد نظر، چنین‌اند:

$$5, 16, 27, 38, 49, \ldots, 995$$

که تصاعدی حسابی با جملهٔ اول ۵، قدر نسبت ۱۱ ، جملهٔ آخر ۹۹۵ تشکیل می‌دهند. مجموع جمله‌های این تصاعد را به سادگی می‌توان به دست آورد (تعداد جمله‌های این تصاعد، برابر ۹۱ است):

$$S = \frac{91}{2}(5 + 995) = 91 \times 500 = 45500$$

مثال ۱۳. *در یک تصاعد حسابی، جملهٔ پانزدهم برابر ۴۰ و جملهٔ بیست‌وپنجم برابر ۷۰ شده است. جملهٔ صدم این تصاعد چقدر است؟*

حل. اگر تصاعدی حسابی را در نظر بگیریم که جملهٔ اول آن $a_{15} = 40$ و جمله یازدهم آن $a_{25} = 70$ باشد (این تصاعد، بخشی از تصاعد مساله است)، باید داشته باشیم:

$$70 \quad 40 + 10d \Rightarrow d = 3$$

یعنی قدر نسبت تصاعد ما برابر است با ۳. اکنون a_1، جملهٔ اول تصاعد را پیدا می‌کنیم داریم $a_{15} = a_1 + 14d$، یعنی

$$40 = a_1 + 14 \times 3 \Rightarrow a_1 = -2$$

و برای محاسبهٔ جملهٔ صدم

$$a_{۱۰۰} = -۲ + ۹۹ \times ۳ = ۲۹۵$$

۳§. تصاعد هندسی

۱. تعریف. به دنباله‌ای که خارج قسمت هر دو جمله پشت سر هم آن مقدار ثابتی باشد، **تصاعد هندسی** و این خارج قسمت ثابت را **قدر نسبت** آن گویند.

درتصاعدهندسی‌هم، شبیه تصاعد حسابی، جملهٔ اول را با $a_۱$ و جملهٔ nام را با a_n، ولی قدر نسبت را با q نشان می‌دهیم. در این‌جا چند نمونه تصاعد هندسی داده شده است:

$$۱, ۲, ۴, ۸, ۱۶, \ldots; \ (q = ۲)$$
$$۴, ۱, \frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۱۶}, \ldots; \ \left(q = \frac{۱}{۴}\right)$$
$$۱, x, x^۲, x^۳, \ldots; \ (q = x)$$

۲. جملهٔ nام تصاعد هندسی. تصاعدی هندسی با جملهٔ اول $a_۱$ و قدر نسبت q در نظر می‌گیریم:

$$a_۱, a_۱q, a_۱q^۲, a_۱q^۳, \ldots, a_۱q^{n-۱}, \ldots$$

به این ترتیب، این دستور، برای محاسبهٔ جملهٔ nام تصاعد هندسی به دست می‌آید:

$$\boxed{a_n = a_۱q^{n-۱}} \qquad (I)$$

یادداشت. توجه به این نکته جالب است که، در مقایسه با دستور محاسبهٔ جملهٔ nام در تصاعد حسابی، عمل‌های جمع و ضرب، به عمل‌های

ضرب و توان تبدیل شده‌اند. دو دستور را زیر هم می‌نویسیم:

$$a_n = a_۱ + d \times (n - ۱) \text{ (حسابی)}$$
$$a_n = a_۱ \times q^{n-۱} \text{ (هندسی)}$$

در دستور مربوط به تصاعد حسابی، دو جمله با هم جمع شده‌اند، در حالی که در دستور مربوط به تصاعد هندسی، دو جمله با نشانهٔ ضرب به هم بستگی پیدا کرده‌اند؛ در اولی، قدر نسبت تصاعد در $(n - ۱)$ ضرب شده، در حالی که در دومی، قدر نسبت به توان $(n - ۱)$ رسیده است. همین بستگی بین تصاعد حسابی و تصاعد هندسی، موجب کشف یکی از اساسی‌ترین مفهوم‌ها، یعنی *لگاریتم* شد که، در فصل بعد، با آن آشنا خواهیم شد.

مثال ۱۴. *تصاعدی هندسی پیدا کنید که عددهای ۱۱، ۴۴ و ۷۰۴، جمله‌هایی از آن باشند؛ در ضمن قدر نسبت تصاعد، عددی درست باشد.*

حل. ۱۱ را جملهٔ اول، ۴۴ را جملهٔ nام و ۷۰۴ را جملهٔ mام تصاعد می‌گیریم. در این صورت باید داشته باشیم:

$$۷۰۴ = ۱۱q^{m-۱} \text{ و } ۴۴ = ۱۱q^{n-۱} \qquad (*)$$

از تقسیم این دو برابری بر یکدیگر، به دست می‌آید $(q \neq ۰)$:

$$\frac{۷۰۴}{۴۴} = q^{m-n} \Rightarrow ۱۶ = q^{m-n}$$

q و $m - n$، عددهایی درست‌اند، بنابراین عدد ۱۶، می‌تواند به یکی از حالت‌های $۲^۴$، $۴^۲$ و $۱۶^۱$ در نظر گرفته شود.

$q^{m-n} = ۲^۴$ به معنای $q = ۲$ است که، در این صورت، با توجه به برابری‌های $(*)$، مقدارهای m و n به دست می‌آید: $n = ۳$، $m = ۷$.

از برابری $q^{m-n} = ۴^۲$، به دست می‌آید $q = ۴$ و سپس $n = ۲$، $m = ۴$.

برابری $q^{m-n} = ۱۶^{۱}$، ما را به جواب نمی‌رساند (برای m و n، عددهای درستی به دست نمی‌آید).

پاسخ. اگر جملهٔ اول تصاعد را برابر ۱۱ بگیریم، یکی از دو تصاعد زیر، جواب مساله است:

$$۱۱, ۲۲, ۴۴, ۸۸, ۱۷۶, ۳۵۲, ۷۰۴, \ldots;$$

$$۱۱, ۴۴, ۱۷۶, ۷۰۴, \ldots$$

می‌توان‌از ۷۰۴ آغازکرد دوتصاعد هندسی‌دیگر باقدرنسبت‌های $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۴}$ نوشت.

مثال ۱۵. *می‌دانیم درصد متوسط رشد سالانهٔ تولید شیر یک گاوداری، مقدار ثابتی است. این گاوداری در سال ۱۳۶۰، یک میلیون تن شیر تولید کرده است و در سال ۱۳۷۰، تولید آن به ۲ میلیون تن رسیده است. این گاوداری در سال ۱۳۶۵، چقدر شیر تولید کرده است؟*

حل. چون درصد رشد سالانه شیر، مقدار ثابتی است، عددهای معرف میزان تولید شیر در سال‌های پشت سر هم، تشکیل یک تصاعد هندسی می‌دهند. اگر قدر نسبت این تصاعد را q بگیریم، چون ضمن ۱۱ سال (از ۱۳۶۰ تا ۱۳۷۰)، تولید شیر، از ۱ میلیون تن به ۲ میلیون تن رسیده است، با توجه به دستور (I) باید داشته باشیم:

$$۲ = ۱ \times q^{۱۰} \Rightarrow q = \sqrt[۱۰]{۲}$$

اکنون می‌توانیم، مقدار تولید شیر را در سال ۱۳۶۵ (یعنی جملهٔ ششم تصاعد) را پیدا کنیم:

$$a_۶ = a_۱ q^۵ \Rightarrow a_۶ = ۱ \times (\sqrt[۱۰]{۲})^۵ = \sqrt{۲} \approx ۱/۴۱۴$$

پاسخ. در سال ۱۳۶۵، اندکی بیش از یک میلیون و چهارصد و چهارده هزار تن شیر تولید شده است.

مثال ۱۶. *سه عدد که مجموعی برابر ۱۳ دارند، تشکیل یک تصاعد هندسی داده‌اند؛ ولی اگر به این سه عدد، به ترتیب، عددهای ۲، ۷ و ۸ را اضافه کنیم، سه عدد حاصل تشکیل یک تصاعد حسابی می‌دهند. این سه عدد را پیدا کنید.*

حل. سه عدد را a، b و c می‌نامیم. بنا به فرض

$$a + b + c = ۱۳$$

و چون سه عدد به تصاعد هندسی هستند، بنابراین

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{b} \Rightarrow b^۲ = ac$$

عددهای $a + ۲$، $b + ۷$ و $c + ۸$ به تصاعد حسابی هستند، پس

$$(a + ۲) + (c + ۸) = ۲(b + ۷) \Rightarrow a - ۲b + c = ۴$$

به این ترتیب، به دستگاهی شامل سه معادلهٔ سه مجهولی می‌رسیم:

$$\left| \begin{array}{l} a + b + c = ۱۳ \\ a - ۲b + c = ۴ \\ b^۲ = ac \end{array} \right.$$

اگر معادلهٔ دوم را از معادله اول کم کنیم، مقدار b به دست می‌آید: $b = ۳$. در این صورت، معادله‌های اول و سوم، این دستگاه دو معادلهٔ دومجهولی را پدید می‌آورند:

$$\begin{cases} a + c = ۱۰ \\ a \cdot c = ۹ \end{cases} \quad (a < c)$$

یعنی a و c، ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $t^۲ - ۱۰t + ۹ = ۰$ هستند: $a = ۱$ و $c = ۹$.

پاسخ. ۱، ۳ و ۹.

مثال ۱۷. ***جملهٔ چهارم و سیزدهم یک تصاعد هندسی، به ترتیب، برابر ۲۴ و ۱۲۲۸۸ شده است. تصاعد را مشخص کنید.***

حل. یک تصاعد وقتی مشخص می‌شود که قدر نسبت و جملهٔ اول آن معلوم باشد. جملهٔ اول تصاعد را $a_۱$ و قدر نسبت تصاعد را q می‌نامیم. باید داشته باشیم:

$$a_{۱۳} = a_۱q^{۱۲} \text{ و } a_۴ = a_۱q^۳$$

که اگر این دو برابری را بر هم تقسیم کنیم و به‌جای $a_۴$ و $a_{۱۳}$ مقدارشان را قرار دهیم، به دست می‌آید:

$$q^۹ = ۵۱۲ = ۲^۹ \Rightarrow q = ۲$$

و از برابری $a_۴ = a_۱q^۳$، مقدار $a_۱$ پیدا می‌شود:

$$۲۴ = a_۱ \times ۲^۳ \Rightarrow a_۱ = ۳$$

تصاعد هندسی مورد نظر مساله، چنین است:

$$۳, ۶, ۱۲, ۲۴, ۴۸, ۹۶, \ldots$$

مثال ۱۸. *در معادلهٔ درجه چهارم*

$$ax^۴ + bx^۳ + ۴x^۲ + cx + d = ۰$$

می‌دانیم عبارت درجهٔ چهارم سمت چپ برابری بر $x^۲ + x + ۱$ بخش‌پذیر است و، درضمن، عددهای a، b و ۴ به تصاعد هندسی و عددهای ۴، c و d به تصاعد حسابی هستند. آیا این معادله، ریشه‌های حقیقی دارد؟

حل. اگر عبارت درجه چهارم $ax^۴ + bx^۳ + ۴x^۲ + cx + d$ را بر $x^۲ + x + ۱$ تقسیم کنیم. خارج قسمتی برابر $ax^۲ - (a-b)x - (b-۴)$

و باقی‌مانده‌ای برابر $(a+c-۴)x+(b+d-۴)$ به دست می‌آید. با توجه به فرض مساله، باید این باقی‌مانده متحد با صفر باشد (اگر یک چندجمله‌ای بر چند جمله‌ای دیگر بخش‌پذیر باشد، به معنای آن است که، به ازای هر مقدار دلخواه مجهول، عدد حاصل از چندجمله‌ای مقسوم، بر عدد حاصل از چندجمله‌ای مقسوم‌علیه، بخش‌پذیر است). یعنی

$$(a+c-۴)x+(b+d-۴)\equiv ۰$$

و این اتحاد وقتی برقرار است که داشته باشیم:

$$a+c=۴(۱);\quad b+d=۴ \qquad (۲)$$

a و b و ۴، سه جملهٔ از یک تصاعد هندسی‌اند، یعنی

$$b:a=۴:b\Rightarrow b^۲=۴a \qquad (۳)$$

۴ و c و d سه جملهٔ متوالی از یک تصاعد حسابی‌اند، یعنی

$$۲c=d+۴ \qquad (۴)$$

برای چهار مجهول a، b، c و d، چهار معادله پیدا کردیم. از مجموع معادله‌های (۲) و (۴) به دست می‌آید:

$$b+۲c=۸$$

بین این معادله و معادلهٔ (۱)، مجهول c را حذف می‌کنیم، به دست می‌آید:

$$b=۲a \qquad (۵)$$

این مقدار b را در معادلهٔ (۳) قرار می‌دهیم:

$$۴a^۲=۴a\Rightarrow a=۱$$

(a نمی‌تواند برابر صفر باشد، زیرا معادلهٔ اصلی باید درجهٔ چهارم باشد).
از (۵) نتیجه می‌شود: $b = ۲$؛ از (۱) به دست می‌آید: $c = ۳$؛ و از (۴) مقدار d به دست می‌آید: $d = ۲$. بنابراین، معادلهٔ درجه چهارم چنین می‌شود:

$$x^۴ + ۲x^۳ + ۴x^۲ + ۳x + ۲ = ۰$$

عبارت سمت چپ برابری، بر $x^۲ + x + ۱$ بخش‌پذیر و، بنابراین، قابل تجزیه است:

$$(x^۲ + x + ۱)(x^۲ + x + ۲) = ۰$$

درنتیجه، معادلهٔ درجه چهارم، به دو معادلهٔ درجه دوم

$$x^۲ + x + ۱ = ۰ \text{ و } x^۲ + x + ۲ = ۰$$

تبدیل می‌شود که هیچ کدام ریشهٔ حقیقی ندارد.

۳. میانگین هندسی دو یا چند عدد. اگر a، b و c، جمله‌های پشت سر هم یک تصاعد هندسی باشند، b را **میانگین هندسی یا واسطهٔ هندسی** دو عدد a و c گویند و روشن است که:

$$b^۲ = ac \Rightarrow b = \sqrt{ac}$$

به طور کلی، ریشهٔ nام حاصل ضرب n عدد مثبت را، میانگین هندسی این n عدد گویند. ۴، میانگین هندسی دو عدد ۲ و ۸ و یا میانگین هندسی سه عدد ۲ و ۵ و ۶٫۴ است، زیرا

$$\sqrt{۲ \times ۸} = ۴ \text{ و } \sqrt[۳]{۵ \times ۲ \times ۶٫۴} = \sqrt[۳]{۶۴} = ۴$$

اگر $a_۱$، $a_۲$، $a_۳$، ...، a_n را n عدد مثبت فرض کنیم، میانگین هندسی آن‌ها برابر است با

$$\sqrt[n]{a_۱ a_۲ a_۳ \ldots a_n}$$

مثال ۱۹. *میانگین هندسی سه عدد برابر ۵ و میانگین حسابی آن‌ها برابر $\frac{۴۷}{۶}$ است. اگر به عدد بزرگتر $\frac{۱۳}{۲}$ اضافه کنیم، عدد متوسط، میانگین حسابی دو عدد دیگر می‌شود. این سه عدد را پیدا کنید.*

حل. عدد کوچکتر را x، عدد متوسط را y و عدد بزرگتر را z می‌نامیم. با توجه به فرض‌های مساله، باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} \sqrt[۳]{xyz} = ۵ \\ \dfrac{x+y+}{۳} = \dfrac{۴۷}{۶} \\ \dfrac{x + (z + \frac{۱۳}{۲})}{۲} = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xyz = ۱۲۵ \\ x + y + z = \dfrac{۴۷}{۲} \\ x - ۲y + z = -\dfrac{۱۳}{۲} \end{cases}$$

اگر معادلهٔ سوم را از معادلهٔ دوم کم کنیم، مقدار y به دست می‌آید:

$$۳y = \frac{۴۷}{۲} + \frac{۱۳}{۲} = ۳۰ \Rightarrow y = ۱۰$$

بنابراین، برای x و z به دست می‌آید

$$xz = \frac{۲۵}{۲}, x + z = \frac{۲۷}{۲}$$

یعنی x و z $(z > x)$ ریشه‌های این معادلهٔ درجه دوم‌اند:

$$t^۲ - \frac{۲۷}{۲}t + \frac{۲۵}{۲} = ۰ \Rightarrow t_۱ = ۱, t_۲ = ۱۲/۵$$

پاسخ. ۱، ۱۰ و ۱۲/۵.

۴. مجموع n جمله از تصاعد هندسی. اگر جملهٔ اول تصاعد هندسی را $a_۱$، قدر نسبت تصاعد را q و مجموع n جملهٔ اول آن را S_n بنامیم، داریم:

$$S_n = a_۱ + a_۱q + a_۱q^۲ + \ldots + a_۱q^{n-۲} + a_۱q^{n-۱} \qquad (۱)$$

اگر دو طرف برابری (۱) را در q (که مخالف صفر است) ضرب کنیم:

$$qS_n = a_۱q + a_۱q^۲ + \ldots + a_۱q^{n-۱} + a_۱q^n \qquad (۲)$$

برابری (۲) را از برابری (۱) کم می‌کنیم، به دست می‌آید:

$$S_n - qS_n = q_۱ - a_۱q^n \Rightarrow \boxed{S_n = \frac{a_۱(۱ - q^n)}{۱ - q}} \quad (\mathrm{II})$$

مثال ۲۰. *(این مساله از یک کتاب قدیمی برداشته شده است؛ البته با اندک تفاوتی در عددها). اسب مسابقه را ۸۰۰ هزار تومان قیمت گذاشتند. ولی خریدار معتقد بود، قیمت اسب گران است. فروشنده پیشنهادی به خریدار کرد. پیشنهاد او چنین بود: من اسب را به شما هدیه می‌کنم، ولی ۲۴ میخ نعل‌های او را باید به این ترتیب از من بخرید. برای میخ اول یک ریال، برای میخ دوم، ۲ ریال، برای میخ سوم ۴ ریال، برای میخ چهارم ۸ ریال و غیره باید به من بپردازید (یعنی برای هر میخ، دو برابر قیمت میخ قبلی). خریدار که گمان می‌کرد فروشنده عقل خود را از دست داده و می‌خواهد اسب را به چند ریال ناقابل به او بدهد، پیشنهاد او را پذیرفت و قرارداد را امضا کرد. آیا فروشنده زیان کرده است؟*

حل. اگر قیمت پیشنهادی فروشنده را، برای ۲۴ میخ نعل‌های اسب، به ردیف بنویسیم، تصاعدی هندسی با جملهٔ اول $a_۱ = ۱$ و قدر نسبت $q = ۲$ تشکیل می‌دهند. این تصاعد ۲۴ جمله دارد ($n = ۲۴$):

$$۱, ۲, ۴, ۲^۳, ۲^۴, \ldots, ۲^{۲۳}$$

بنابراین، مجموع جمله‌های این تصاعد، چنین می‌شود:

$$S = \frac{۱(۲^{۲۴} - ۱)}{۲ - ۱} = ۲^{۲۴} - ۱$$

برای محاسبهٔ $۲^{۲۴}$، ابتدا $۲^{۱۰}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$۲^{۱۰} = ۱۰۲۴$$

$$۲^{۲۴} = ۲^{۱۰} \times ۲^{۱۰} \times ۲^{۴} = ۱۰۲۴ \times ۱۰۲۴ \times ۱۶ =$$

$$= ۱۰۴۸۵۷ \times ۱۶ = ۱۶۷۷۷۲۱۶$$

بنابراین $S = ۱۶۷۷۷۲۱۵$. فروشنده، با پیشنهاد خود، توانسته است، اسب را به بیش از یک میلیون و ۶۷۰ هزار تومان، یعنی به بیش از دو برابر قیمت واقعی آن بفروشد.

***مثال ۲۱.** *طول‌های چهار ضلع یک چهارضلعی کوژ، چهار جملهٔ پشت سر هم از یک تصاعد هندسی هستند. قدر نسبت این تصاعد چه عددهایی می‌تواند باشد؟*

حل. اگر قدر نسبت تصاعد را q بنامیم، طول ضلع‌ها به صورت

$$a, aq, aq^{۲}, aq^{۳}$$

درمی‌آیند. در هر چهارضلعی کوژ، طول ضلع بزرگتر، از مجموع طول‌های سه ضلع دیگر کوچکتر است. دو حالت پیش می‌آید:

۱) $q > ۱$. در این حالت $aq^{۳}$، طول ضلع بزرگتر است. باید داشته باشیم:

$$aq^{۳} < aq^{۲} + aq + a \Rightarrow q^{۳} - q^{۲} - q - ۱ < ۰$$

عبارت سمت چپ این نابرابری را می‌توان به این صورت نوشت:

$$(q^{۲} + q)(q - ۲) + (q - ۱)$$

$q - ۱$ مقداری است مثبت (q را بزرگتر از ۱ فرض کردیم)، بنابراین برای این که این عبارت، مقداری منفی باشد، باید

$$(q^{۲} + q)(q - ۲)$$

مقداری منفی بشود؛ و چون $q^۲ + q$ مثبت است، باید داشته باشیم:

$$q - ۲ < ۰ \Rightarrow q < ۲$$

۲) $۱ > q > ۰$. در این حالت ضلع به طول a بزرگترین ضلع است، باید داشته باشیم:

$$a < aq + aq^۲ + aq^۳$$

دو طرف نابرابری را بر $aq^۳$ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{۱}{q^۳} < \frac{۱}{q^۲} + \frac{۱}{q} + ۱$$

اگر فرض کنیم $r = \frac{۱}{q}$ ($r > ۱$)، به این نامعادله می‌رسیم

$$r^۳ - r^۲ - r - ۱ < ۰$$

که همان نامعادلهٔ حالت قبل است و به دست می‌آید:

$$r = \frac{۱}{q} < ۲ \Rightarrow q > \frac{۱}{۲}$$

پاسخ. $۲ > q > \frac{۱}{۲}$. قدر نسبت تصاعد، عددی است بین $\frac{۱}{۲}$ و ۲.

۵. تصاعد هندسی نزولی. اگر قدر نسبت یک تصاعد هندسی، عددی بین ۱− و ۱+ باشد ($۱ > q > ۱-$)، یعنی وقتی $|q| < ۱$، آن وقت، تصاعد هندسی را نزولی گویند. هریک از دنباله عددهای

$$۲, ۱, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۸}, \frac{۱}{۱۶}, \ldots \quad \left(q = \frac{۱}{۲}\right)$$

$$۲, -۱, \frac{۱}{۲}, -\frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۸}, -\frac{۱}{۱۶}, \ldots \quad \left(q = -\frac{۱}{۲}\right)$$

معرف یک تصاعد هندسی نزولی است.

در تصاعد هندسی نزولی، قدر مطلق جمله‌ها، به سرعت کوچک می‌شود، به نحوی که، اگر تعداد جمله‌ها را به اندازهٔ کافی زیاد بگیریم، جمله‌های تصاعد، به اندازهٔ کافی به صفر نزدیک می‌شوند.

مجموع همهٔ جمله‌های یک تصاعد هندسی نزولی. تصاعد هندسی نزولی

$$۲, ۱, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۸}, \ldots, \frac{۱}{۲^n}, \ldots$$

را در نظر می‌گیریم ($\frac{۱}{۲^n}$، جمله $(n+۲)$ام این تصاعد است؛ بگویید چرا؟). مجموع n جمله از این تصاعد را، طبق دستور II پیدا می‌کنیم. جملهٔ nام این تصاعد، برابر است با $\frac{۱}{۲^{n-۲}}$ و بنابراین

$$S = \frac{۲(۱ - \frac{۱}{۲^{n-۱}})}{۱ - \frac{۱}{۲}} = ۴\left(۱ - \frac{۱}{۲^{n-۱}}\right)$$

مثلاً، اگر فرض کنیم $n = ۱۱$، در این صورت

$$\frac{۱}{۲^{n-۱}} = \frac{۱}{۲^{۱۰}} = \frac{۱}{۱۰۲۴} \approx ۰/۰۰۱$$

درنتیجه

$$S_{۱۱} = ۴\left(۱ - \frac{۱}{۲^{۱۰}}\right) \approx ۴ - ۰/۰۰۴$$

مجموع ۱۰ جملهٔ تصاعد، اندکی از ۴ کمتر است. اکنون $n = ۲۱$ می‌گیریم:

$$\frac{۱}{۲^{n-۱}} = \frac{۱}{۲^{۲۰}} = \frac{۱}{۱۰۴۸۵۷۶} \approx ۰/۰۰۰۰۰۱;$$

$$S_{۲۱} = ۴\left(۱ - \frac{۱}{۲^{۲۰}}\right) \approx ۴ - ۰/۰۰۰۰۰۴$$

مجموع ۲۱ جمله، خیلی نزدیک به ۴ شد و، اگر رقم‌های کمتر از یک‌صد هزارم اهمیتی برای ما نداشته باشد، می‌توان گفت مجموع ۲۱ جمله تصاعد برابر ۴ است.

اگر تعداد جمله‌ها را بیشتر بگیریم، باز هم مقدار مجموع جمله‌ها، به ۴ نزدیکتر می‌شود. مثلاً مقدار $S_{۱۰۰}$، یعنی مجموع ۱۰۰ جملهٔ تصاعد، عددی است که، اختلاف آن با ۴، از $\frac{۱}{۱۰^{۳۰}}$ کمتر است ($\frac{۱}{۱۰^{۳۰}}$، برابر عددی است که با ... ۰/۰ آغاز می‌شود، همهٔ رقم‌های بعد از ممیز تا رقم سی‌ام برابر صفر است).

به این ترتیب، روشن است که، اگر همهٔ جمله‌های تصاعد (یعنی بی‌نهایت جمله) را در نظر بگیریم، می‌توانیم مجموع جمله‌ها را برابر ۴ بدانیم.

مجموع جمله‌های همین تصاعد نزولی (۱) را، با مثال روشن‌تری پیدا می‌کنیم.

مثال ۲۲. *شیر محصول یک گاوداری را، بعد از میکروب‌زدایی داخل شیشه‌های یک لیتری عرضه می‌کنند. ولی اگر کسی شیشه‌های خالی را برگرداند، در برابر هر دو شیشهٔ خالی، یک شیشهٔ حاوی شیر به او می‌دهند. خریداری ۲ شیشهٔ پر از شیر را می‌خرد. این خریدار، با پولی که پرداخته است، در واقع، چند لیتر شیر می‌تواند داشته باشد؟*

حل. اگر خریدار دو شیشهٔ خالی را برگرداند، یک شیشهٔ یک لیتری شیر می‌گیرد. با برگرداندن شیشهٔ خالی، می‌تواند $\frac{۱}{۲}$ لیتر شیر همراه با شیشهٔ آن (یعنی $\frac{۱}{۲}$ شیشه) دریافت کند. اگر، به صورت ذهنی داوری کنیم، این $\frac{۱}{۲}$ شیشهٔ خالی، به اندازهٔ $\frac{۱}{۴}$ لیتر شیر (همراه با $\frac{۱}{۴}$ شیشه) ارزش دارد و غیره؛ یعنی مقدار شیری که خریدار، با پرداخت پول دو شیشهٔ یک لیتری حاوی شیر، در واقع به اندازهٔ

$$۲ + ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۸} + \dots \qquad (۱)$$

لیتر شیر خریده است. ولی $\frac{۱}{۲}$ شیشه، $\frac{۱}{۴}$ شیشه و غیره معنی ندارد. خریدار ظرف بزرگی با خود برمی‌دارد، پول دو شیشهٔ یک لیتری پر از شیر را می‌پردازد، شیرها را در ظرف خود خالی می‌کند، و شیشه‌های خالی را برمی‌گرداند، یک شیشهٔ یک لیتری شیر می‌گیرد و در ظرف خود خالی می‌کند. تا این‌جا ۳ لیتر شیر در ظرف خود ریخته است، ولی هنوز یک شیشهٔ خالی در اختیار دارد. او از فروشنده یک شیشهٔ یک لیتری دیگر می‌گیرد، در ظرف خود خالی می‌کند و شیشه خالی آن را، همراه با شیشهٔ خالی قبلی، بابت بهای شیشهٔ پر از شیری که گرفته بود، تحویل فروشنده می‌دهد و با ۴ لیتر شیر به منزل برمی‌گردد.

می‌بینید، در عمل، مجموع همهٔ جمله‌های تصاعد (۱)، برابر همان ۴ می‌شود که قبلاً هم به دست آورده بودیم.

دستور مربوط به محاسبهٔ مجموع همهٔ جمله‌های تصاعد هندسی نزولی. می‌دانیم، برای محاسبهٔ مجموع n جمله از یک تصاعد هندسی، باید از دستور

$$S_n = \frac{a_۱(۱ - q^n)}{۱ - q}$$

استفاده کرد. وقتی $|q| < ۱$، آن وقت $|q^n|$ با بزرگتر شدن n، کوچکتر

می‌شود و وقتی n، عددی بسیار بزرگ باشد $|q^n|$ بسیار کوچک می‌شود. در ریاضیات می‌گویند: هرگاه n **بی‌نهایت بزرگ** شود، مقدار $|q^n|$ **بی‌نهایت کوچک** می‌شود. چون تعداد جمله‌ها بی‌نهایت است، در عمل، برای محاسبهٔ مجموع S، یعنی مجموع همهٔ جمله‌های یک تصاعد هندسی نزولی، می‌توان از q^n صرف‌نظر کرد و نوشت:

$$\boxed{S = \frac{a_۱}{۱ - q}} \qquad \text{(III)}$$

و این، دستورِ محاسبهٔ مجموع همهٔ جمله‌های یک تصاعد هندسی نزولی است. مثلاً برای تصاعد هندسی نزولی

$$۲, -۱, \frac{۱}{۲}, -\frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۸}, -\frac{۱}{۱۶}, \ldots$$

که تصاعدی است با جملهٔ اول $a_۱ = ۲$ و قدر نسبت $q = -\frac{۱}{۲}$ به دست می‌آید:

$$S = \frac{۲}{۱ - \left(-\frac{۱}{۲}\right)} = \frac{۲}{۱ + \frac{۱}{۲}} = \frac{۴}{۳}$$

مثال ۲۳. *مثلث متساوی‌الاضلاعی با ضلع به طول برابر a مفروض است. اگر نقطه‌های وسط ضلع‌های این مثلث را به هم وصل کنیم، مثلث متساوی‌الاضلاع دیگری به دست می‌آید. اگر نقطه‌های وسط ضلع‌های این مثلث تازه را به هم وصل کنیم، مثلث سوم به دست می‌آید. اگر این عمل را بی‌نهایت بار تکرار کنیم، بی‌نهایت مثلث متساوی‌الاضلاع به دست می‌آید. مجموع محیط‌ها و مجموع مساحت‌های همهٔ این مثلث‌ها را به دست آورید.*

حل. ۱) مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع برابر a، محیطی برابر $۳a$ دارد. وقتی وسط ضلع‌های مثلثی را به هم وصل کنیم، مثلث تازه‌ای به دست می‌آید

که محیط آن نصف محیط مثلث اصلی است. بنابراین، مثلث دوم محیطی برابر $\frac{۳a}{۲}$، مثلث سوم محیطی برابر $\frac{۳a}{۴}$ و غیره دارد. به این ترتیب، برای پیدا کردن مجموع محیط‌های همهٔ مثلث‌ها، باید مجموع همهٔ جمله‌های یک تصاعد هندسی نزولی با جملهٔ اول $۳a$ و قدر نسبت $q = \frac{۱}{۲}$ را به دست آوریم:

$$۳a + \frac{۳a}{۲} + \frac{۳a}{۴} + \ldots = \frac{۳a}{۱ - \frac{۱}{۲}} = ۶a$$

۲) مثلث متساوی‌الاضلاع با ضلع به طول a، ارتفاعی به طول $\frac{a\sqrt{۳}}{۲}$ دارد (چرا؟). بنابراین، مساحت این مثلث، برابر $\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴}$، مساحت مثلث دوم (که از وصل وسط‌های ضلع‌های مثلث اول به دست آمده است) برابر $\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۱۶}$، مساحت مثلث سوم برابر $a^۲\frac{\sqrt{۳}}{۶۴}$ و غیره می‌شود و، برای مجموع مساحت‌های همهٔ مثلث‌ها داریم:

$$\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴} + \frac{a^۲\sqrt{۳}}{۱۶} + \frac{a^۲\sqrt{۳}}{۶۴} + \ldots = \frac{\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴}}{۱ - \frac{۱}{۴}} = \frac{a^۲\sqrt{۳}}{۳}$$

پاسخ. مجموع محیط‌های همهٔ مثلث‌ها برابر $۶a$ واحد و مجموع مساحت‌های همهٔ مثلث‌ها برابر $\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۳}$ واحد مربع است.

مثال ۲۴. *حاصل این عبارت را به دست آورید (داخل کروشه، بی‌نهایت جمله وجود دارد):*

$$۴(\sqrt{۳}+۲)\left[\sqrt{۳}(\sqrt{۳} - ۲) + \frac{۳ - ۲\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}} + \frac{\sqrt{۳} - ۲}{\sqrt{۳}} + \frac{\sqrt{۳} - ۲}{۳} + \ldots\right]$$

حل. جمله‌های داخل کروشه، جمله‌های پشت سر هم یک تصاعد هندسی نزولی با قدر نسبت $q = \frac{۱}{\sqrt{۳}}$ هستند، زیرا

$$\sqrt{۳}(\sqrt{۳} - ۲) \times \frac{۱}{\sqrt{۳}} = (۳ - ۲\sqrt{۳}) \times \frac{۱}{\sqrt{۳}} = \frac{۳ - ۲\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}};$$

$$\frac{۳ - ۲\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}} \times \frac{۱}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}(\sqrt{۳} - ۲)}{\sqrt{۳}} \times \frac{۱}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳} - ۲}{\sqrt{۳}};$$

$$\frac{\sqrt{۳} - ۲}{\sqrt{۳}} \times \frac{۱}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳} - ۲}{۳}; \ldots$$

بنابراین، اگر عبارت مفروض را S بنامیم، به دست می‌آید:

$$S = ۴(\sqrt{۳} + ۲)\left[\frac{\sqrt{۳}(\sqrt{۳} - ۲)}{۱ - \frac{۱}{\sqrt{۳}}}\right] =$$

$$= ۴(\sqrt{۳} + ۲) \times \frac{۳(\sqrt{۳} - ۲)}{\sqrt{۳} - ۱} =$$

$$= \frac{۱۲(\sqrt{۳} + ۲)(\sqrt{۳} - ۲)}{\sqrt{۳} - ۱} = \frac{۱۲(۳ - ۴)}{\sqrt{۳} - ۱} =$$

$$= -\frac{۱۲}{\sqrt{۳} - ۱} = -\frac{۱۲(\sqrt{۳} + ۱)}{۳ - ۱} = -۶(\sqrt{۳} + ۱)$$

*۴§. مفهوم تصاعد در گذشته و حال

ریاضی‌دانان مصر باستان، توان‌های پشت سر هم عدد ۲ را می‌شناختند و، برای انجام عمل ضرب، از توان‌های ۲ استفاده می‌کردند. مثلاً، توجه می‌کردند

که ۲۳۵ را می‌توان به صورت مجموعی از توان‌ها ۲ نوشت:

$$۲۳۵ = ۱ + ۲^{۱} + ۲^{۳} + ۲^{۵} + ۲^{۶} + ۲^{۷} =$$
$$= ۱ + ۲ + ۸ + ۳۲ + ۶۴ + ۱۲۸$$

بنابراین برای ضرب ۲۳۵ در عددی مثل a می‌نوشتند:

۱	a
۲	$۲a$
۸	$۸a$
۳۲	$۳۲a$
۶۴	$۶۴a$
۱۲۸	$۱۲۸a$
	$۲۳۵a$

و این، نخستین اندیشه، دربارهٔ استفاده از تصاعد هندسی (توان‌های متوالی عدد ۲)، برای انجام عمل ضرب بود.

ولی بابِلی‌ها (مردم ساکن «میان‌دورود») و تا حدی عیلامی‌ها، از مصری‌ها جلوتر بودند. آن‌ها جدول‌هایی تنظیم کرده بودند که شامل مجذور و توان سوم، جذر و کعب عددها بود؛ جدول‌هایی برای ضرب، تقسیم و عکس عددها در اختیار داشتند؛ حاصل عبارت $a^{۳} + a^{۲}$ را برای $a = ۱$ تا $a = ۶۰$ و حاصل عددهای ۹^{n}، ۱۰۰^{n} و ۲۲۵^{n} را برای $n = ۱$ تا $n = ۱۰$، در جدول‌های جداگانه‌ای ثبت کرده بودند.

بابلی‌ها و به احتمالی عیلامی‌ها (در جنوب و جنوب غربی ایران کنونی)، تصاعدها را می‌شناختند و در جدول‌هایی که تنظیم کرده بودند، مجموع جمله‌های تصاعد حسابی، مجموع جمله‌های تصاعد هندسی، مجموع مجذورهای عددهای طبیعی متوالی و بسیاری محاسبه‌های دیگر را آورده بودند. آن‌ها می‌توانستند، با در دست داشتن جملهٔ kام، و مجموع n جمله

از تصاعد، قدر نسبت آن را محاسبه کنند. محاسبه‌ها طوری انجام شده است که گویا از همهٔ دستورهای امروزی مربوط به تصاعدها اطلاع داشته‌اند.

در یونان باستان و، سپس، در مکتب اسکندریه هم، با تصاعدها (و بیشتر به یاری هندسه) کار می‌کردند. فیثاغورث (سدهٔ ششم پیش از میلاد)، سه نوع تناسب را توضیح می‌دهد:

تناسب حسابی:	$a - b = c - d$
تناسب هندسی:	$a : b = c : d$
تناسب همساز	$\frac{۱}{a} - \frac{۱}{b} = \frac{۱}{c} - \frac{۱}{d}$

و می‌دانیم، تناسب‌ها، آغازی برای شناختن تصاعدها هستند. اودوکس (سدهٔ چهارم پیش از میلاد)، بحثی منظم‌تر دربارهٔ تصاعدها دارد تا، سرانجام، اقلیدس (سدهٔ سوم پیش از میلاد)، در کتاب معروف «مقدمات» خود، به همهٔ این بحث‌ها، نظمی منطقی می‌دهد.

ریاضی‌دانان هندی هم با تصاعدها آشنا بودند. مهاویرا، ریاضی‌دان هندی سدهٔ نهم میلادی، مساله‌هایی دربارهٔ تصاعد (حسابی و هندسی) دارد و سه سده پیش از آن، در کتاب «سه فصل در حساب» که به وسیلهٔ یک ریاضی‌دان چینی نوشته شده است، مساله‌هایی دربارهٔ تصاعد حسابی وجود دارد.

تا سدهٔ شانزدهم میلادی، تصاعد را (چه حسابی و چه هندسی)، از جایی آغاز می‌کردند و به سمت راست ادامه می‌دادند و، دنباله، تنها از یک سمت پیش می‌رفت. نخستین کسی که اندیشهٔ ادامهٔ جمله‌های تصاعد را از دو طرف مطرح کرد، شتیفل (۱۴۸۶_۱۵۶۷ میلادی)، ریاضی‌دان آلمانی بود.

تمرین‌ها

۱۳۵. دو تصاعد حسابی بنویسید. از هر جملهٔ تصاعد اول، جملهٔ نظیر آن را در تصاعد دوم، کم کنید. آیا دنباله‌ای که به دست می‌آید، یک تصاعد

حسابی تازه است؟

۱۳۶. حاصل این کسر را، به‌ازای $x = ۰/۰۲$ به دست آورید:

$$y = \frac{x^۸ + x^۶ + x^۴ + x^۲ + ۱}{x^۴ + x^۳ + x^۲ + x + ۱}$$

۱۳۷. حاصل ضرب n جمله از تصاعد هندسی با جملهٔ اول a و قدر نسبت q را پیدا کنید.

۱۳۸. در یک دنباله، می‌دانیم $u_۰ = ۱$ و $u_{n+۱} = u_n + ۲n$. جملهٔ عمومی دنباله (یعنی u_n بر حسب n) را پیدا کنید.

۱۳۹. ثابت کنید، جمله‌های دنبالهٔ $\{y_n = ۲^n\}$ $(n = ۰, ۱, ۲, \ldots)$، در رابطهٔ $y_{n+۲} - ۳y_{n+۱} + ۲y_n = ۰$ صدق می‌کنند.

۱۴۰. الف) دنبالهٔ $\{y_n = q^n\}$ را پیدا کنید، به شرطی که بدانیم:

$$y_{n+۲} - ۵y_{n+۱} + ۶y_n = ۰$$

*ب) آیا دنباله‌های دیگری، با همین شرط، وجود دارند؟

۱۴۱. برای دنباله‌ای می‌دانیم $u_۱ = ۰$ و $u_۲ = ۱$، از جملهٔ سوم به بعد، هر جمله برابر است با مجموع دو جملهٔ قبل از آن. این دنباله را، **دنبالهٔ فیبوناچی** و جملهٔ nام آن را، nامین **عدد فیبوناچی** گویند.

الف) دستور برگشتی برای عددهای فیبوناچی را بنویسید؛

ب) ۱۲ جملهٔ اول از دنبالهٔ فیبوناچی را پیدا کنید؛

*ج) دستوری پیدا کنید که. جمله عمومی دنبالهٔ فیبوناچی، یعنی جملهٔ nام آن را بر حسب n مشخص کند

*د) ثابت کنید، برای هر n، این برابری برای عددهای فیبوناچی برقرار است:

$$u_{n+۱} \cdot u_{n-۱} - u_n^۲ = \pm ۱ \ (+۱ \text{ یا } -۱)$$

۱۴۲. این مجموع‌ها را محاسبه کنید:

$$۱)\ ۱ - ۲^۲ + ۳^۲ - ۴^۲ + \ldots + ۹۹^۲ - ۱۰۰^۲;$$

$$۲)\ ۵ + ۵۵ + ۵۵۵ + \ldots + \overbrace{۵۵۵\ldots۵}^{n\text{رقم}};$$

$$*۳)\ ۱ \times ۲ + ۲ \times ۳ + ۳ \times ۴ + \ldots + ۱۰۰ \times ۱۰۱;$$

$$*۴)\ \frac{۱}{۲ \times ۵} + \frac{۱}{۵ \times ۸} + \frac{۱}{۸ \times ۱۱} + \ldots + \frac{۱}{۶۲ \times ۶۵};$$

$$*۵)\ \frac{۱}{۱ \times ۲} + \frac{۱}{۲ \times ۳} + \frac{۱}{۳ \times ۴} + \ldots + \frac{۱}{n(n+۱)} + \ldots;$$

$$*۶)\ \frac{۱}{۱ \times ۳} + \frac{۱}{۳ \times ۵} + \frac{۱}{۵ \times ۷} + \ldots + \frac{۱}{(۲n-۱)(۲n+۱)} + \ldots$$

۱۴۳. میله‌ای آهنی، در صفر درجه، طولی برابر یک متر دارد. اگر l_t را طول میله در درجهٔ حرارت t بگیریم، می‌توان آن را، طبق دستور

$$l_t = ۱ + ۰/۰۰۰۰۱۲t$$

به دست آورد. یک تصاعد حسابی بنویسید که جمله‌های آن، معرف طول این میله، در درجه حرارت‌های ۰، ۱، ۲، ... درجه باشد. طول این میله در حرارت ۱۰۰ درجه چقدر است؟

۱۴۴. سرعت دوچرخه، ضمن پایین آمدن از تپه، در هر ثانیه به اندازهٔ ثابتی اضافه می‌شود (در بحث مربوط به حرکت، می‌گویند: دوچرخه، *شتابی* ثابت دارد). اگر این دوچرخه، از آغاز ثانیه دهم تا پایان ثانیه شانزدهم، با سرعت متوسط ۶/۴۵ متر در ثانیه و از آغاز ثانیه دوازدهم تا پایان ثانیهٔ نوزدهم، با سرعت متوسط ۷/۷ متر در هر ثانیه حرکت کرده باشد، سرعت نخستین دوچرخه و سرعت آن را در پایان ثانیهٔ نوزدهم پیدا کنید.

*۱۴۵. اگر جسمی به وزن F کیلوگرم را به اندازهٔ s متر بالا ببریم، می‌گویند به اندازهٔ $A = Fs$ (کیلوگرم متر) کار انجام داده‌ایم.

مخزنی مکعب مستطیلی با قاعدهٔ ۶۰ × ۵۰ سانتی‌متر و ارتفاع برابر ۸۰ سانتی‌متر، پر از آب است. برای بیرون آوردن همهٔ آب مخزن، چند کیلوگرم متر کار لازم است؟

*۱۴۶. سه عدد که تشکیل تصاعد هندسی داده‌اند، مجموعی برابر عدد مثبت a دارند. کمترین و بیشترین مقدار حاصل ضرب این سه عدد، چقدر است؟

*۱۴۷. $u_n = \frac{۴n}{n^۴ + ۲n^۲ + ۹}$، جملهٔ عمومی یک دنباله است، مجموع

$$S = u_۱ + u_۲ + \ldots + u_n + \ldots$$

را به دست آورید.

۱۴۸. در سه‌جمله‌ای درجه دوم $ax^۲ + bx + c$، می‌دانیم b میانگین حسابی a و c؛ همچنین b میانگین هندسی a و $-\frac{c}{۳}$ است. معادلهٔ $ax^۲ + bx + c = ۰$ را حل کنید.

۱۴۹. ثابت کنید، اگر n را عددی خیلی بزرگ بگیریم، نسبت $\frac{u_{n+۱}}{u_n}$ در دنبالهٔ فیبوناچی، به عدد $\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ بسیار نزدیک می‌شود، به نحوی که وقتی n را بی‌نهایت بگیریم، این نسبت با $\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ برابر است.

۱۵۰. دست مزد روزانهٔ (۷ ساعت کار) ۱۰ کارگر متخصص، ۵ کارگر دستیار و ۱۵ کارگر ساده روی هم ۳۶۷۰۸۰ ریال و دست‌مزد روزانهٔ ۵ کارگر متخصص، ۱۵ کارگر دستیار و ۱۰ کارگر ساده روی هم ۳۶۵۶۸۰ ریال است. اگر دست‌مزدهای هر ساعت کار، برای کارگر ساده، دستیار و متخصص، به تصاعد هندسی باشند، دست‌مزد هر ساعت کار هریک از کارگران را پیدا کنید.

۱۵۱. کمترین سرعت زاویه‌ای ماشین تراش ۹ و بیشترین سرعت آن

۲۸۸ دور در دقیقه است. جعبهٔ پیشرفت (گیربوکس پیشرفت) را طوری تنظیم کرده‌ایم که امکان ۴ سرعت زاویه‌ای دیگر را فراهم آورد، به نحوی که با دو سرعت زاویه‌ای مفروض (کمترین و بیشترین)، ۶ جمله از یک تصاعد هندسی را تشکیل دهند. این چهار سرعت زاویه‌ای محور دوران را پیدا کنید.

۱۵۲. تولید یک کشور، در طول ۷ سال، رشد سالانهٔ ۶/۸ درصد داشته است. ثابت کنید، در سه سال آخر به اندازهٔ چهار سال اول، تولید صنعتی وجود داشته است.

۱۵۳. مجموع چهار جمله اول از یک تصاعد هندسی نزولی برابر است با

$$۳/۱۰۶۴۸۱۴۸۱\ldots = ۳/۱۰۶(۴۸۱)$$

و مجموع همهٔ جمله‌های این تصاعد، برابر ۶ شده است. تصاعد را پیدا کنید.

۱۵۴. در مثلث متساوی‌الاضلاع با ضلع به طول a، دایره‌ای محاط کرده‌ایم. اگر نقطه‌های تماس دایره با ضلع‌های مثلث را به هم وصل کنیم، مثلث متساوی‌الاضلاع تازه‌ای به دست می‌آید. دایره محاطی این مثلث دوم را رسم کرده‌ایم، به همین ترتیب، با وصل نقطه‌های تماس دایره با ضلع‌های مثلث دوم به یکدیگر، مثلث متساوی‌الاضلاع سوم به دست می‌آید که دایرهٔ محاط در آن را رسم کرده‌ایم و غیره. مجموع مساحت‌های همهٔ دایره‌هایی که به این ترتیب به دست می‌آید، پیدا کنید.

۱۵۵. m چه عددی باشد تا معادلهٔ

$$۳x^۴ - ۲(۲m + ۱)x^۲ + m + ۱ = ۰$$

چهار ریشهٔ حقیقی داشته باشد که تشکیل یک تصاعد حسابی بدهند.

۸. لگاریتم و تابع لگاریتمی

§۱. عمل عکس در ریاضیات

۱. سه عدد ۵ و ۶ و ۳۰ را در نظر می‌گریم. بین این سه عدد چه رابطه‌ای وجود دارد؟ روشن است که با انجام عمل ضرب روی دو عدد ۵ و ۶، عدد ۳۰ به دست می‌آید:

$$۵ \times ۶ = ۳۰$$

ضرب، تعریفی مستقل دارد. برای ضرب دو عدد طبیعی مثل ۶×۵، می‌گوییم، اگر عدد ۵ را ۶ بار بنویسیم و سپس با هم جمع کنیم؛ یا عدد ۶ را ۵ بار بنویسیم و سپس با هم جمع کنیم، حاصل ضرب ۶ × ۵ به دست می‌آید.

اگر از سه عدد ۵ و ۶ و ۳۰، بخواهیم به یاری دو عدد ۵ و ۶، عدد ۳۰ را به دست آوریم، با عمل ضرب سروکار داریم؛ ولی اگر از این سه عدد، دو عدد ۶ و ۳۰ یا ۵ و ۳۰ را در اختیار داشته باشیم، برای به دست آوردن عدد سوم، باید از عمل تقسیم استفاده کنیم. ولی، برای تعریف عمل تقسیم، به طور معمول دوباره به عمل ضرب استناد می‌کنند. برای تقسیم ۳۰ بر ۶ باید عددی پیدا کرد که اگر آن را در ۶ ضرب کنیم، عدد ۳۰ حاصل

شود. *تقسیم، تعریفی مستقل ندارد و به کمک عمل ضرب تعریف می‌شود. عمل تقسیم، عکس عمل ضرب و به آن وابسته است.*

۲. اکنون عمل توان را در نظر می‌گیریم: $۳۲ = ۲^۵$. توان تعریف دارد: اگر عدد ۲ را ۵ بار بنویسیم و سپس در هم ضرب کنیم، حاصل $۲^۵$ به دست می‌آید. ببینیم، برای عمل توان، چند عمل عکس می‌توان پیدا کرد. اگر از سه عدد ۲ و ۵ و ۳۲، دو عدد ۵ و ۳۲ را در اختیار داشته باشیم، با چه عملی می‌توان به یاری آن، عدد ۲ را به دست آورد؟ با عمل ریشه گرفتن: $\sqrt[۵]{۳۲}$ برابر ۲ می‌شود. بنابراین، اگر از ما بپرسند $\sqrt[۵]{۳۲}$ یعنی چه! می‌گوییم، منظور پیدا کردن عددی است که، توان پنجم آن برابر ۳۲ شود، یعنی *برای تعریف ریشگی، از مفهوم توان استفاده می‌کنیم.* **ریشه گرفتن، عملی عکس عمل به توان رساندن است.**

اما کار تمام نشده است. اگر از سه عدد ۲ و ۵ و ۳۲، دو عدد ۲ و ۳۲ را در اختیار داشته باشیم، با چه عملی می‌توان ۵ را به دست آورد!

این عمل را هنوز نمی‌شناسیم، تنها می‌دانیم یکی از عمل‌های عکس، برای عمل توان است. برای این عمل، نامی گذاشته‌اند: **لگاریتم گرفتن.** می‌گویند: لگاریتم عدد ۳۲ در پایهٔ ۲، برابر ۵ می‌شود و این طور می‌نویسند:

$$\log_{۲} ۳۲ = ۵$$

(بخوانید: لگاریتم ۳۲ در مبنای ۲، یا در پایهٔ ۲، برابر است با ۵)؛ یعنی اگر ۲ را به توان ۵ برسانیم، عدد ۳۲ به دست می‌آید.

لگاریتم هم، یکی از عمل‌های عکس توان است و به یاری توان تعریف می‌شود. وقتی می‌نویسیم:

$$\log_a A = n$$

یعنی $A = a^n$، مثلاً $\log_۵ ۱۲۵$ برابر ۳ می‌شود، زیرا $۵^۳$ برابر ۱۲۵ است؛

یا $\log_{\frac{۱}{۲}} ۱۶$ برابر ۴− است، زیرا

$$\left(\frac{۱}{۲}\right)^{-۴} = \frac{۱}{۲^{-۴}} = ۲^{۴} = ۱۶$$

نتیجه مهم. دیدیم، این دو برابری هم‌ارزند:

$$\log_a A = n \text{ و } a^n = A$$

اگر در برابری $a^n = A$، به جای n، مقدارش را از برابری دیگر، یعنی $\log_a A = n$ قرار دهیم، به دستوری می‌رسیم که در حل بسیاری از مساله‌ها، می‌تواند مفید باشد.

$$\boxed{a^{\log_a A} = A} \qquad (۱)$$

برابری (۱) را، **اتحاد اصلی لگاریتم** گویند.

مثال ۱. محاسبه کنید:

$$۱)\ \log_{۳\sqrt{۳}} ۲۷; \quad ۲)\ \log_{۲} \frac{۱}{۸};$$

$$۲)\ \log_{۳} \sqrt[۴]{۳}; \quad ۴)\ \log_{۲} \log_{۲} \log_{۴} ۲۵۶$$

(وقتی می‌نویسیم $\log_a \log_b A$، یعنی $\log_a(\log_b A)$.)

حل. چون $\sqrt{۲۷} = ۳\sqrt{۳}$ و $(\sqrt{۲۷})^{۲} = ۲۷$، پس

$$\log_{۳\sqrt{۳}} ۲۷ = ۲;$$

۲) چون $\frac{۱}{۸} = ۲^{-۳}$، پس $\log_{۲} \frac{۱}{۸} = -۳$؛

۳) چون $\sqrt[۴]{۳} = ۳^{\frac{۱}{۴}}$، پس $\log_{۳} \sqrt[۴]{۳} = \frac{۱}{۳}$؛

۴) به ترتیب، از راست به چپ محاسبه می‌کنیم:

$$\log_۲ \log_۲ \log_۲ ۲۵۶ = \log_۲ \log_۲ ۴ = \log_۲ ۲ = ۱$$

۲§. تعریف و ویژگی‌ها

تعریف. a را عددی مثبت و مخالف واحد فرض می‌کنیم. در این صورت، لگاریتم عدد N در مبنای a، به عدد x گفته می‌شود، به نحوی a^x برابر با N شود؛ یعنی **عدد** x، **لگاریتم عدد** N **در مبنای** a **است، به شرطی که** $a^x = N$.

ویژگی‌های لگاریتم، ناشی از ویژگی‌های متناظر آن در توان است. این ویژگی‌ها را می‌آوریم:

۱) پیش از همه باید توجه کرد که، عددهای منفی و صفر، در هیچ مبنایی لگاریتم ندارند؛ زیرا مبنای لگاریتم، عددی مثبت و مخالف واحد است؛ و این مبنا به هر توانی (مثبت، منفی یا صفر) برسد، نتیجه مثبت خواهد داد.

۲) لگاریتم عدد ۱، در هر مبنای مثبت و مخالف واحد، برابر است با صفر.

۳) اگر مبنا بزرگتر از واحد باشد، لگاریتم عددهای بزرگتر از ۱، مثبت و لگاریتم عددهای کوچکتر از ۱، منفی است:

برای $a > ۱$ و $N > ۱$ داریم $\log_a N > ۰$.

برای $a > ۱$ و $۰ < N < ۱$ داریم: $\log_a N < ۰$

مثال‌ها: $\log_{۱۰} ۱۰۰ = ۲$؛ $\log_{۱۰} ۰/۰۱ = -۲$؛ $\log_۲ ۴ = ۲$؛ $\log_۲ \frac{۱}{۴} = -۲$.

۳) وقتی مبنا، عددی بین ۰ و ۱ باشد ($۰ < a < ۱$)، آن وقت لگاریتم عددهای بزرگتر از واحد منفی و لگاریتم عددهای کوچکتر از واحد

(و مثبت) مثبت است:

$$\log_{\frac{۱}{۱۰}} ۱۰۰ = -۲;\ \log_{\frac{۱}{۱۰}} ۰/۰۱ = ۲;$$
$$\log_{\frac{۱}{۲}} ۸ = -۳;\ \log_{\frac{۱}{۲}} \frac{۱}{۸} = ۳$$

۴) لگاریتم هر عدد در مبنای برابر آن عدد، برابر واحد است:

$$\log_a a = ۱$$

۵) وقتی مبنا بزرگتر از واحد باشد، عدد بزرگتر، لگاریتم بزرگتری دارد:
اگر $M > N$ و $a > ۱$، آن وقت $\log_a M > \log_a N$.
۶) وقتی مبنا بین صفر و واحد باشد، عدد بزرگتر، لگاریتم کوچکتری دارد:
اگر $M > N$ و $۰ < a < ۱$، آن وقت $\log_a M < \log_a N$.

§۳. قانون‌های محاسبه

۱) a و b را، عددهایی مثبت و مخالف واحد می‌گیریم و فرض می‌کنیم:

$$\log_a b = x$$

در این صورت $a^x = b$ یا $a = b^{\frac{۱}{x}}$، یعنی

$$\log_b a = \frac{۱}{x}$$

و از ضرب این دو رابطه، به دست می‌آید:

$$\boxed{\log_a b \cdot \log_b a = ۱} \qquad (۲)$$

۲) *قانون تغییر مبنا.* M عددی است مثبت و عددهای مثبت a و b، مخالف با واحدند. در این صورت

$$\boxed{\log_b M = \frac{\log_a M}{\log_a b}} \qquad (۳)$$

برابری (۳) اجازه می‌دهد از مبنایی به مبنای دیگر برویم (لگاریتم در مبنای b، به لگاریتم در مبنای a). درضمن، عدد $\frac{1}{\log_a b}$ را، *مدول عبور از مبنای* b *به مبنای* a گویند.

اثبات برابری (۳). با توجه به دستور (۱) می‌توان نوشت:

$$M = b^{\log_b M} \text{ و } b = a^{\log_a b}$$

مقدار b را از برابری دوم در برابری اول قرار می‌دهیم:

$$M = b^{\log_b M} = (a^{\log_a b})^{\log_b M} = a^{(\log_a b)(\log_b M)}$$

درنتیجه، بنابر تعریف لگاریتم (لگاریتم M در مبنای a) خواهیم داشت:

$$\log_a M = \log_a b \cdot \log_b M$$

که از آن‌جا به دست می‌آید:

$$\log_b M = \frac{\log_a M}{\log_a b}$$

۳) فرض می‌کنیم: $\log_a M = x$ و $\log_a N = y$؛ یعنی

$$a^x = M \text{ و } a^y = N$$

از ضرب این دو برابری در یکدیگر، به دست می‌آید:

$$a^{x+y} = M \cdot N \Rightarrow \log_a(M \cdot N) = x + y$$

که اگر به جای x و y، مقدارشان را بگذاریم:

$$\boxed{\log_a(M \cdot N) = \log_a M + \log_a N} \qquad (۴)$$

به این ترتیب، لگاریتم، عمل ضرب را، به عمل ساده‌تر جمع تبدیل می‌کند: *لگاریتم حاصل ضرب دو عدد، برابر است با مجموع لگاریتم‌های آن‌ها.*

۴) با استدلالی شبیه حالت قبل، به این دستور می‌رسیم:

$$\boxed{\log_a\left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N} \qquad (۵)$$

لگاریتم خارج قسمت دو عدد، برابر است با تفاضل لگاریتم‌های آن‌ها.

۵) با توجه به دستورهای (۴) و (۵) می‌توان نتیجه گرفت

$$\boxed{\log_a(M^\alpha) = \alpha \log_a M} \qquad (۶)$$

$$\boxed{\log_a(\sqrt[n]{M}) = \frac{۱}{n}\log_a M} \qquad (۷)$$

دستورهای (۱) تا (۷)، راهنمای ما در محاسبهٔ عبارت‌های شامل لگاریتم هستند.

مثال ۲. *حاصل این عبارت‌های عددی را به دست آورید:*

$$۱)\ \log_{\sqrt{a}} a^{۴}, \qquad ۲)\ \log_{۱۶} ۳۲; \quad ۳)\ \log_{۲۷} ۸۱;$$

$$۴)\ \log_۲\left(\frac{۲}{۳}\right) + \log_۲\left(\frac{۹}{۴}\right); \qquad ۵)\ \log_۸ ۱۶ - \log_۸ ۲$$

حل. به ترتیب داریم:

$$۱)\ \log_{\sqrt{a}}(a^{۴}) = \frac{\log_a a^{۴}}{\log_a \sqrt{a}} = \frac{۴\log_a a}{\frac{۱}{۲}\log_a a} = ۸;$$

$$۲)\ \log_{۱۶} ۳۲ = \frac{\log_۲ ۳۲}{\log_۲ ۱۶} = \frac{۵}{۴};$$

$$۳)\ \log_{۲۷} ۸۱ = \frac{\log_۳ ۸۱}{\log_۳ ۲۷} = \frac{۴}{۳};$$

$$۴)\ \log_۲\left(\frac{۲}{۳}\right) + \log_۴\left(\frac{۹}{۴}\right) = \log_۲\left(\frac{۲}{۳}\right) + \frac{\log_۲(\frac{۹}{۴})}{\log_۲ ۴} =$$

$$= \log_۲\left(\frac{۲}{۳}\right) + \frac{۱}{۲}\log_۲\left(\frac{۹}{۴}\right) = \log_۲\left(\frac{۲}{۳}\right) + \frac{۱}{۲}\log_۲\left(\frac{۳}{۲}\right)^۲ =$$

$$= \log_۲\left(\frac{۲}{۳}\right) + \log_۲\left(\frac{۳}{۲}\right) = \log_۲\left(\frac{۲}{۳} \times \frac{۳}{۲}\right) = \log_۲ ۱ = ۰$$

$$۵)\ \log_۸ ۱۶ - \log_۸ ۲ = \log_۸\left(\frac{۱۶}{۲}\right) = \log_۸ ۸ = ۱$$

مثال ۳. *اگر بدانیم* $\log_{۱۰} ۲ \approx ۰/۳۰۱$*، مقدار تقریبی* $\log_{۱۰} \sqrt[۳]{۵}$ *را پیدا کنید.*

حل. به ترتیب داریم:

$$\log_{۱۰} \sqrt[۳]{۵} = \frac{۱}{۳}\log_{۱۰} ۵ = \frac{۱}{۳}\log_{۱۰}\left(\frac{۱۰}{۲}\right) =$$

$$= \frac{۱}{۳}(\log_{۱۰} ۱۰ - \log_{۱۰} ۲) \approx \frac{۱}{۳}(۱ - ۰/۳۰۱) = ۰/۲۳۳$$

مثال ۴. *کدام بزرگترند:* $\log_{۱۳} ۱۵۰$ *یا* $\log_{۱۷} ۲۹۹$؟

حل. داریم:

$$\log_{۱۳} ۱۵۰ < \log_{۱۳} ۱۶۹ = \log_{۱۳}(۱۳)^۲ = ۲;$$

$$\log_{۱۷} ۲۹۹ > \log_{۱۷} ۲۸۹ = \log_{۱۷}(۱۷)^۲ = ۲$$

$\log_{13} 150$ از ۲ کوچکتر و $\log_{17} 299$ از ۲ بزرگتر است، پس

$$\log_{17} 299 > \log_{13} 150$$

مثال ۵. *x چه عددهایی می‌تواند باشد، اگر داشته باشیم:*

$$1)\ 2\log_{10}(x+3) = 1; \quad 2)\ \log_{10}(x+3) < \log_{10} 2$$

حل. ۱) معادله، به این صورت درمی‌آید:

$$\log_{10}(x+3) = \frac{1}{2} \Rightarrow x+3 = 10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$$

و بنابراین $x = \sqrt{10} - 3$.

۲) چون مبنای لگاریتم بزرگتر از واحد است، باید داشته باشیم:

$$x + 3 < 2 \qquad (*)$$

از طرف دیگر، لگاریتم صفر و عددهای منفی معنا ندارد، پس

$$x + 3 > 0 \qquad (**)$$

از $(*)$ به دست می‌آید $x < -1$ و از $(**)$ نتیجه می‌شود $x > -3$.

پاسخ. $-3 < x < -1$.

مثال ۶. *حاصل این عبارت را پیدا کنید* ($a \neq 1, a > 0$):

$$A = \log_a(\mathrm{tg}1^\circ) + \log_a(\mathrm{tg}2^\circ) + \log_a(\mathrm{tg}3^\circ) + \ldots + \log_a(\mathrm{tg}89^\circ)$$

حل. حاصل‌ضرب تانژانت‌های دو زاویهٔ متمم برابر واحد است، مثلاً

$$\mathrm{tg}10^\circ\,\mathrm{tg}80^\circ = \mathrm{tg}10^\circ \cot 10^\circ = 1$$

با توجه به این مطلب، داریم:

$$A = \log_a(\mathrm{tg}1^\circ\mathrm{tg}2^\circ\mathrm{tg}3^\circ \ldots \mathrm{tg}88^\circ\mathrm{tg}89^\circ) =$$
$$= \log_a[(\mathrm{tg}1^\circ\mathrm{tg}89^\circ)(\mathrm{tg}2^\circ\mathrm{tg}88^\circ)\ldots(\mathrm{tg}44^\circ\mathrm{tg}46^\circ)\cdot\mathrm{tg}45^\circ] =$$
$$= \log_a(1\times 1\times\ldots\times 1\times 1) = \log_a 1 = 0$$

مثال ۷. *این معادله‌ها را حل کنید:*

$$1)\ \log_3 x + \log_x 3 = 2;\quad 2)\ \log_2\log_4\log_5 x = 0$$

حل. ۱) اگر فرض کنیم $\log_3 x = y$ به این معادله می‌رسیم:

$$y + \frac{1}{y} = 2 \Rightarrow y^2 - 2y + 1 = 0$$

که از آن‌جا به دست می‌آید:

$$y = \log_3 x = 1 \Rightarrow x = 3$$

۲) از برابری $\log_2(\log_4\log_5 x) = 0$ به دست می‌آید:

$$\log_4\log_5 x = 1$$

از برابری $\log_4(\log_5 x) = 1$ به دست می‌آید: $\log_5 x = 4$ و از آن‌جا

$$x = 5^4 = 625$$

§۴. لگاریتم دهدهی و لگاریتم طبیعی

۱. طبیعت و عددهای غیر جبری. عددهای گنگ به دو گروه تقسیم می‌شوند: جبری و غیر جبری. عدد گنگ جبری می‌تواند ریشهٔ معادله‌ای با

ضریب‌های گویا باشد، مثل $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۳}$، ولی عدد غیر جبری، نمی‌تواند ریشهٔ معادله‌ای با ضریب‌های گویا باشد. از عددهای غیر جبری، π را می‌شناسیم. این عدد (که به تقریب برابر ۳/۱۴۱۶ است)، نسبت طول محیط دایره را به قطر آن نشان می‌دهد. برای محاسبهٔ محیط یا مساحت دایره، همچنین برای محاسبه سطح یا حجم کره، ناچاریم از عدد π استفاده کنیم. عدد π، جزو ساختمان طبیعت است و، برای محاسبه‌هایی که در طبیعت انجام می‌گیرد (به قول فیلسوفان، برای تفسیر کمیتی طبیعت)، در بسیاری جاها، ناچاریم عدد π را به حساب آوریم.

وجود عددهای گنگ جبری، به روشنی در طبیعت دیده می‌شود. اگر مکعبی با ضلع به طول ۱ سانتی‌متر بسازیم، طول قطر هر وجه آن برابر $\sqrt{۲}$ و طول هر قطر مکعب برابر $\sqrt{۳}$ سانتی‌متر است. ولی همان طور که دربارهٔ عدد π دیدیم، عددهای غیر جبری هم، در ساختمان طبیعت به کار رفته‌اند. **... طبیعت، پیچیده‌تر از آن است که، با کنار گذاشتن عددهای غیر جبری، قابل شناخت باشد.**

عددهای غیر جبری هم، همچون سایر گونه‌های عدد، بسیار زیادند، به نحوی که می‌توان آن‌ها را بسیار فراوان‌تر از همهٔ عددهای جبری (چه گویا و چه گنگ) دانست: $\sin 11°$، $tg 2°$، $\log_2 5$، همه عددهایی غیر جبری‌اند و هرچه با ریاضیات بیشتر آشنا شوید، هم عددهای غیر جبری بیشتری را خواهید شناخت و هم به ارزش و اهمیت آن‌ها (برای شناخت طبیعت) بیشتر پی خواهید برد.

۲. **لگاریتم طبیعی.** یکی از عددهای غیر جبری که در ساختمان طبیعت بسیار به کار رفته است (و در نتیجه، اهمیت زیادی در ریاضیات دارد)، عددی است که آن را با حرف e نشان می‌دهند و به تقریب برابر است با

$$e \approx ۲/۷۱۸۲۸۱۸$$

و **جان نِپر** ریاضی‌دان اسکاتلندی (که دربارهٔ او، اندکی بعد صحبت خواهیم کرد)، همین عدد غیر جبری e را، مبنای لگاریتم قرار داد. لگاریتم در مبنای e را به صورت $\log_e x$ یا بهتر از آن (و آن طور که در ریاضیات معمول شده است) به صورت $\ln x$ نشان می‌دهند (l حرف اول واژهٔ لگاریتم و n حرف اول نام نپر).

لگاریتم با مبنای عدد e را **لگاریتم طبیعی** و یا گاهی **لگاریتم نپری** گویند.

این عدد e چیست و از کجا آمده؟ از بحث تفصیلی در این‌باره می‌گذریم و تنها به یک نکته (که بیشتر جنبهٔ ریاضی این عدد را روشن می‌کند) اشاره می‌کنیم. n را عددی طبیعی می‌گیریم و به عبارت $\left(۱ + \frac{۱}{n}\right)^n$ توجه می‌کنیم. این عبارت را می‌توان به ازای مقدارهای متوالی n محاسبه کرد:

$$n = ۱: \quad \left(۱ + \frac{۱}{n}\right)^n = ۲;$$

$$n = ۲: \quad \left(۱ + \frac{۱}{۲}\right)^۲ = \frac{۹}{۴} = ۲/۲۵;$$

$$n = ۳: \quad \left(۱ + \frac{۱}{۳}\right)^۳ = \frac{۶۴}{۲۷} \approx ۲/۳۷۰;$$

$$n = ۴: \quad \left(۱ + \frac{۱}{۴}\right)^۴ = \frac{۶۲۵}{۲۵۶} \approx ۲/۴۴۱۴;$$

$$n = ۵: \quad \left(۱ + \frac{۱}{۵}\right)^۵ - \frac{۷۷۷۶}{۳۱۲۵} \approx ۲/۴۸۸۳$$

می‌بینیم حاصل $\left(۱ + \frac{۱}{n}\right)^n$، به ترتیب بزرگتر می‌شود، ولی می‌توان ثابت کرد که همیشه، کوچکتر از ۳ باقی می‌ماند. در واقع اگر n را بسیار بزرگ بگیریم، آن وقت حاصل $\left(۱ + \frac{۱}{n}\right)^n$ به مقدار e بسیار نزدیک می‌شود.

در ضمن، عدد e، همیشه از $\left(۱ + \frac{۱}{n}\right)^{n+۱}$ کوچکتر است. مثلاً برای

$n = ۵$ داریم:

$$\left(۱ + \frac{۱}{n}\right)^{n+۱} = \left(\frac{۶}{۵}\right)^{۶} \approx ۲/۹۸۸۹$$

و بنابراین، با توجه به مقدار $\left(۱ + \frac{۱}{n}\right)^{n}$ به ازای $n = ۵$:

$$۲/۴۸۸۳ < \mathrm{e} < ۲/۹۸۸۹$$

و به طور کلی

$$\left(۱ + \frac{۱}{n}\right)^{n} < \mathrm{e} < \left(۱ + \frac{۱}{n}\right)^{n+۱}$$

و هرچه عدد n را بزرگتر بگیریم، به مقدار واقعی عدد e نزدیک‌تر می‌شویم.

۳. **لگاریتم دهدهی.** در لگاریتم دهدهی، مبنای لگاریتم برابر ۱۰ است؛ به **لگاریتم دهدهی**، **لگاریتم اعشاری** هم می‌گویند. لگاریتم دهدهی را به صورت $\log$ (بدون نوشتن مبنا) و یا بهتر از آن به صورت $\lg$ نشان می‌دهند. در این کتاب $\log_a$ به معنای لگاریتم در مبنای a، $\ln$ به معنای لگاریتم طبیعی و $\lg$ به معنای لگاریتم دهدهی است.

لگاریتم دهدهی و لگاریتم طبیعی عددها و، همچنین، تابع‌های مثلثاتی، در جدول‌هایی به نام **جدول‌های لگاریتم** آورده شده است (البته به تقریب) تا در محاسبه‌ها مورد استفاده قرار گیرد.

برای آشنایی با شیوهٔ محاسبه به یاری جدول‌های لگاریتم و روش استفاده از این جدول‌ها، باید تا انتشار جلدهای بعدی «ریاضیات محاسبه‌ای» صبر کنید.

مثال ۸. این معادله‌ها را حل کنید:

$$۱)\ \frac{۱}{۱۲}\lg^{۲} x = \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۴}\lg x;$$

$$۲)\ \sqrt{\lg x} + \lg\sqrt{x} + \frac{۱}{۲} = ۰$$

$$۳)\ (x^۲ - ۷x + ۱۹)^{\lg x} - (۵x - ۸)^{\lg x} = ۰$$

حل. ۱) اگر $\lg x$ را y بنامیم، بعد از عمل‌های ساده، به این معادله می‌رسیم:

$$y^۲ + ۳y - ۴ = ۰ \Rightarrow y_۱ = ۱, y_۲ = -۴$$

از معادلهٔ $\lg x = ۱$ به دست می‌آید $x = ۱۰$ و از معادلهٔ $\lg x = -۴$ به دست می‌آید: $x = ۱۰^{-۴} = ۰/۰۰۰۱$.

۲) چون $\lg\sqrt{x} = \frac{۱}{۲}\lg x$، پس

$$\sqrt{\lg x} + \frac{۱}{۲}\lg x + \frac{۱}{۲} = ۰ \Rightarrow \lg x + ۲\sqrt{\lg x} + ۱ = ۰$$

از آن‌جا $(\sqrt{\lg x} + ۱)^۲ = ۰$ و $\sqrt{\lg x} = -۱$ که قابل قبول نیست. این معادله جواب ندارد.

۳) معادله را به این صورت می‌نویسیم:

$$(x^۲ - ۷x + ۱۹)^{\lg x} = (۵x - ۸)^{\lg x}$$

این برابری وقتی برقرار است که داشته باشیم:

$$\lg x = ۰ \text{ یا } x^۲ - ۷x + ۱۹ = ۵x - ۸$$

که از آن‌جا به دست می‌آید: $x_۱ = ۳$، $x_۲ = ۹$، $x_۳ = ۱$.

مثال ۹. *این نامعادله‌ها را حل کنید:*

$$۱)\ \lg(۱ - x) < ۱; \quad ۲)\ \lg(x^۲ + ۷x + ۲۰) > ۱;$$

$$۳)\ \frac{۱ + \log_a^۲ x}{۱ + \log_a x} > ۱\ (۰ < a < ۱)$$

حل. ۱) نامعادله را به این صورت می‌نویسیم:

$$\lg(۱-x) < \lg ۱۰ \Rightarrow ۱-x < ۱۰ \Rightarrow x > -۹$$

به‌جز این، مقدار $x - ۱$ باید مثبت باشد (لگاریتم عدد منفی معنا ندارد).

پاسخ. $-۹ < x < ۱$.

۲) چون $۱ = \lg ۱۰$ پس

$$\lg(x^۲ + ۷x + ۲۰) > \lg ۱۰ \Rightarrow x^۲ + ۷x + ۲۰ > ۱۰ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^۲ + ۷x + ۱۰ > ۰ \Rightarrow (x+۲)(x+۵) > ۰$$

باید هر دو پرانتز مثبت یا هر دو پرانتز منفی باشند:

$$\begin{cases} x+۲ > ۰ \\ x+۵ > ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -۲ \\ x > -۵ \end{cases} \Rightarrow x > -۲;$$
$$\begin{cases} x+۲ < ۰ \\ x+۵ < ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -۲ \\ x < -۵ \end{cases} \Rightarrow x < -۵$$

پاسخ. $x > -۲$ یا $x < -۵$.

۳) $\log_a x$ را y می‌نامیم:

$$\frac{y^۲+۱}{y+۱} > ۱ \Rightarrow \frac{y^۲-y}{y+۱} > ۰$$

می‌دانیم علامت خارج قسمت با علامت حاصل ضرب یکی است. بنابراین با شرط $y \neq -۱$، می‌توان نامعادله را به این صورت نوشت:

$$y(y-۱)(y+۱) > ۰$$

در یک جدول، علامت هریک از عامل‌های ضرب و، سپس، علامت حاصل ضرب آن‌ها را پیدا می‌کنیم (مثلاً $y+۱$ به ازای $y < -۱$ منفی و به ازای

$y > -۱$ مثبت است):

y	$-\infty$ تا -۱	-۱ تا ۰	۰ تا $+۱$	$+۱$ تا $+\infty$
y	$-$	$-$	$+$	$+$
$y-۱$	$-$	$-$	$-$	$+$
$y+۱$	$-$	$+$	$+$	$+$
$y(y-۱)(y+۱)$	$-$	$+$	$-$	$+$

به این ترتیب $y > ۱$ یا $-۱ < y < ۰$. باید این دو نامعادله را حل کنیم:

$$\log_a x > ۱ \quad \text{و} \quad -۱ < \log_a x < ۰$$

نامعادلهٔ اول به پاسخ $۰ < x < a$ می‌رسد (وقتی مبنای لگاریتم، یعنی a از واحد کوچکتر باشد، آن وقت لگاریتم عددهای کوچکتر از مبنا، یعنی وقتی $۰ < x < a$، از واحد بزرگتر می‌شود). نامعادلهٔ دوم، هم‌ارز با این دستگاه است:

$$\begin{cases} \log_a x < ۰ \\ \log_a x > -۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > ۱ \\ ۰ < x < \frac{۱}{a} \end{cases} \Rightarrow ۱ < x < \frac{۱}{a}$$

مثال ۱۰. *کدام بزرگترند:*

۱) $(۱/۰۰۰۰۰۱)^{۱۰۰۰۰۰۰}$ یا ۲؛ ۲) $۱۰۰۰^{۱۰۰۰}$ یا $۱۰۰۱^{۹۹۹}$؟

حل: ۱) در متن درس دیدیم، برای $n > ۱$ داریم:

$$\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^n > ۲$$

این نابرابری، به‌ازای $n = ۱۰^۶$ به صورت

$$\left(۱+\frac{۱}{۱۰^۶}\right)^{۱۰^۶} > ۲$$

درمی‌آید. بنابراین $(1/000001)^{1000000}$ از ۲ بزرگتر است.

۲) در متن درس دیدیم برای $n > 4$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < 3$$

اکنون، برای تعیین عدد بزرگتر، نسبت آن‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{1001^{999}}{1000^{1000}} = \left(\frac{1001}{1000}\right)^{1000} \times \frac{1}{1001} = \left(1+\frac{1}{1000}\right)^{1000} \times$$

$$\times \frac{1}{1001} < 3 \times \frac{1}{1001} < 1$$

بنابراین $1001^{999} < 1000^{1000}$

پاسخ. عدد 1000^{1000} از عدد 1001^{999} بزرگتر است.

۵§. تابع لگاریتمی

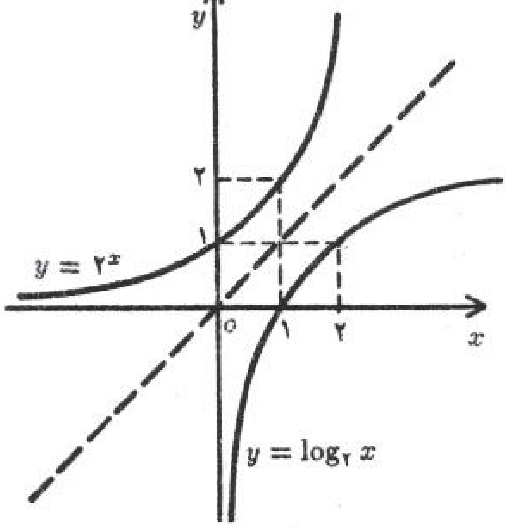
تابع با ضابطهٔ $y = \log_a x$ را تابع لگاریتمی گویند و روشن است که، این تابع، عکس تابع با ضابطهٔ $y = a^x$ است؛ بنابراین، نمودار $y = \log_a x$، قرینهٔ نمودار $y = a^x$، نسبت به نیمساز ربع‌های اول و سوم است (شکل ۳۸).

مثال ۱۱. *نمودار تابع‌های با این ضابطه‌ها را رسم کنید.*

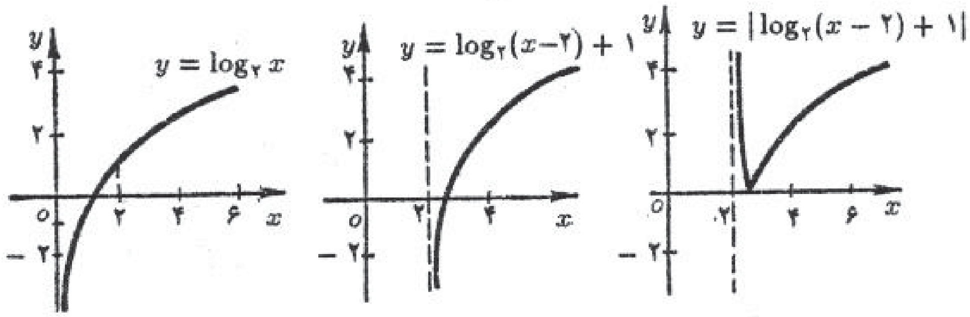
$$1)\ y = |\log_2(x-2)+1|; \quad 2)\ y = \lg(x^2-3x+2)$$

حل. ۱) تابع برای همهٔ مقدارهای x که عبارت جلو لگاریتم را مثبت کند، یعنی به ازای $x > 2$ معین است.

نمودار را به این ترتیب رسم می‌کنیم. در آغاز نمودار $y = \log_2 x$ را به دست می‌آوریم (شکل ۳۹، نمودار سمت چپ). سپس، این نمودار

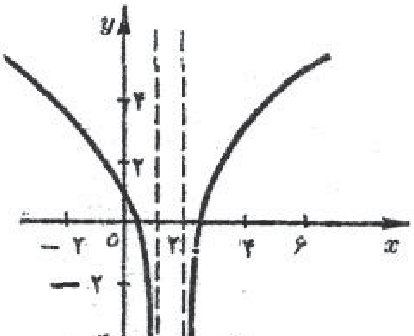


شکل ۳۸



شکل ۳۹

را، به اندازهٔ دو واحد به سمت راست و در طول محور ox و به اندازهٔ یک واحد به سمت بالا در طول محور oy جابه‌جا می‌کنیم؛ نمودار تابع $y = \log_۲(x - ۲) + ۱$ به دست می‌آید (شکل ۳۸، نمودار وسط). سرانجام، قرینهٔ بخشی از نمودار را که زیر محور ox قرار دارد، نسبت به محور ox پیدا می‌کنیم تا نمودار تابع مفروض به دست آید (شکل ۳۹، نمودار سمت راست).



شکل ۴۰

۲) برای رسم این نمودار، از ویژگی‌های سه‌جمله‌ای درجه دوم جلو لگاریتم، یعنی $(x^۲ - ۳x + ۲)$ آغاز می‌کنیم. این سه‌جمله‌ای به‌ازای $x = ۱$ و $x = ۲$ برابر صفر می‌شود.

سه جمله‌ای در فاصلهٔ $۲ > x > ۱$، منفی و به ازای $۱ > x$ و $۲ < x$ مثبت است.

بنابراین تابع مفروض به ازای $۱ > x$ و $۲ < x$ معین است، یعنی به ازای مقدارهایی از x که سه جمله‌ای جلو لگاریتم را مثبت می‌کنند. وقتی x از $-\infty$ تا ۱ تغییر کند، مقدار سه جمله‌ای از ∞ تا ۰ تغییر می‌کند. بنابراین تابع $y = \lg(x^۲ - ۳x + ۲)$ از $+\infty$ تا $-\infty$ نزول می‌کند. وقتی x از ۲ تا ∞ تغییر کند، سه‌جمله‌ای از ۰ تا ∞ و، بنابراین تابع، از $-\infty$ تا $+\infty$ صعود می‌کند. به این ترتیب، نمودار این تابع، شامل دو شاخه است که نسبت به خط راست $y = \frac{۳}{۲}$ قرینهٔ یکدیگرند (شکل ۴۰).

*§۶. لگاریتم چه سودی دارد و چگونه کشف شد؟

۱. لگاریتم نزدیک به ۳۸۰ سال پیش، در رابطه با نیازهای محاسبه‌های عملی کشف شد و نزدیک به دو سده بعد، پیر سیمون لاپلاس (۱۷۴۹_۱۸۲۷ میلادی)، اخترشناس، ریاضی‌دان و فیزیک‌دان فرانسوی گفت:

لگاریتم، طول زندگی اخترشناسان را چند برابر کرد.

در زمان کشف لگاریتم، برای حل مساله‌های مربوط به اخترشناسی، دریانوردی و عمل‌های بازرگانی، با محاسبه‌های پیچیده، طولانی و ملال‌آور روبه‌رو می‌شدند. مثلاً در آغاز سدهٔ هفدهم میلادی، یوهان کپلر، اخترشناس پرآوازهٔ زمان خود، برای تعیین مدار مریخ، انجام عمل‌های محاسبه‌ای بسیار طولانی و بغرنج را تحمل کرد. به ویژه، عمل ضرب، تقسیم، به توان رساندن و ریشه گرفتن دربارهٔ عددهای با رقم‌های زیاد، وقت و نیروی زیادی را از دانشمندان تلف می‌کرد. برای ساده‌تر کردن محاسبه‌ها، ناچار شده بودند، جدول‌های مختلفی را تنظیم کنند: جدول ضرب عددها، جدول مربع‌ها، جدول جذرها، جدول تابع‌های مثلثاتی و غیره. در برابر کسانی که با محاسبه‌های سنگین سروکار داشتند، همیشه این پرسش وجود داشت:

آیا نمی‌توان عمل ضرب دو عدد را به عمل جمع دو عدد دیگر تبدیل کرد؟ درضمن، اگر به یاری چنین روشی، جواب تقریبی به دست می‌آید، این تقریب پذیرفتنی باشد و، در صورت لزوم راهی برای دقیق‌تر کردن این مقدار تقریبی پیش‌بینی شده باشد. روش کار در این باره، برای ریاضی‌دانان میانهٔ سدهٔ شانزدهم میلادی روشن بود.

در سدهٔ شانزدهم میلادی، دو روش برای تبدیل عمل ضرب به عمل جمع شناخته شده بود. در مثلثات، دو رابطه وجود دارد که، به یاری آن‌ها، می‌توان حاصل ضرب دو کسینوس یا حاصل ضرب دو سینوس را، به مجموع یا تفاضل دو کسینوس تبدیل کرد:

$$\begin{aligned} \cos\alpha\cdot\cos\beta &= \frac{۱}{۲}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)] \\ \sin\alpha\cdot\sin\beta &= \frac{۱}{۲}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)] \end{aligned} \qquad (۱)$$

و **نخستین روش**، برای تبدیل عمل ضرب به یکی از عمل‌های جمع یا تفریق، بر اساس استفاده از همین دو رابطه بود (با این دستورهای مثلثاتی، در سال‌های بعد آشنا خواهید شد).

برای این‌که دو عدد چندرقمی A و B را در هم ضرب کنند (و ما در این‌جا، برای سادگی کار، آن‌ها را مثبت و کوچکتر از واحد فرض می‌کنیم)، به این ترتیب عمل می‌کردند:

۱) به یاری جدول‌های مثلثاتی (که در آن زمان وجود داشت)، زاویه‌های α و β را طوری پیدا می‌کردند که، برای آن‌ها، داشته باشیم:

$$\cos\alpha = A, \quad \cos\beta = B$$

۲) سپس، مجموع و تفاضل این دو زاویه را پیدا می‌کردند و دوباره به یاری همان جدول‌های مثلثاتی، مقدارهای $\cos(\alpha+\beta)$ و $\cos(\alpha-\beta)$ را به دست می‌آوردند.

۳) نصف مجموع این دو مقدار، حاصل ضرب دو عدد A و B را به دست می‌داد (بنا به دستور (۱)). این روش را، با یک واژهٔ یونانی «پروستافه‌ره کردن» (یعنی به جمع یا تفریق درآوردن) می‌نامیدند (prostaphere).

روش دوم که «روش یک چهارم مجذورها» نام داشت، بر اساس این اتحاد جبری بود $A \cdot B = \frac{۱}{۴}(A+B)^{۲} - \frac{۱}{۴}(A-B)^{۲}$. در سال ۱۵۲۲ میلادی، «جدول‌های یک چهارم مجذورها» وجود داشت. به یاری این جدول‌ها، یک چهارم مجذور مجموع و یک چهارم مجذور تفاضل دو عدد A و B و سپس، از تفاضل این دو مقدار، حاصل ضرب مورد نظر را به دست می‌آوردند.

۲. ولی ریاضی‌دانان، به دنبال روش‌های ساده‌تر و عملی‌تری برای محاسبه‌های پیچیده بودند و همین تلاش‌ها، منجر به کشف لگاریتم و تنظیم جدول‌های لگاریتمی شد. دو ریاضی‌دان، به طور جداگانه و بدون این که از کار یکدیگر آگاه باشند، موفق به انجام این کار شدند: جان نپر (۱۵۵۰_۱۶۱۷ میلادی)، ریاضی‌دان اسکاتلندی در سال ۱۶۱۴ میلادی و بورگی (۱۵۵۲_۱۶۳۲ میلاد)، ریاضی‌دان سویسی در سال ۱۶۲۰.

این دو ریاضی‌دان، از راه مقایسهٔ تصاعد حسابی با تصاعد هندسی، به مفهوم لگاریتم رسیدند. البته، از مدت‌ها پیش از نپر، مقایسهٔ دو نوع تصاعد، مورد توجه ریاضی‌دانان بوده است، که از میان آن‌ها می‌توان از ارشمیدس، ریاضی‌دان بزرگ سدهٔ سوم پیش از میلاد در یونان، جمشید کاشانی ریاضی‌دان برجستهٔ ایرانی (در کتاب «رازگشایی حساب» که در سال ۱۴۲۷ میلادی نوشته شده است) و میخائیل شتیفل ریاضی‌دان آلمانی (در کتاب «حساب» که در سال ۱۵۴۴ میلادی نوشته شده است) نام برد. در کتاب شتیفل، به این جدول

مقایسه‌ای برمی‌خوریم:

−۴	−۳	−۲	−۱	۰	۱	۲	۳	۴
$\frac{۱}{۱۶}$	$\frac{۱}{۸}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۲}$	۱	۲	۴	۸	۱۶

۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
۳۲	۶۴	۱۲۸	۲۵۶	۵۱۲	۱۰۲۴	۲۰۴۸	۴۰۹۶

در سطر بالا ردیف عددهای درست و در سطر پایین توان متناظر عدد ۲، نوشته شده است.

به یاری این جدول، می‌توان، به صورتی ساده و سریع، عمل‌های مختلفی را، روی عددهای سطر پایین انجام داد. مثلاً، به جای این که عددهای ۳۲ و ۱۲۸ را در هم ضرب کنیم، عددهای متناظر با آن‌ها را در سطر بالا، با هم جمع می‌کنیم:

$$۵ + ۷ = ۱۲$$

سپس، عدد ۱۲ را در سطر اول پیدا و عدد متناظر آن در سطر پایین را یادداشت می‌کنیم (۴۰۹۶). این نتیجه، ناشی از قانون سادهٔ ضرب توان‌هاست:

$$۲^{۵} \times ۲^{۷} = ۲^{۱۲}$$

به تناظر عمل‌ها، در دو سطر جدول توجه کنیم:

در سطر پایین	در سطر بالا
ضرب	جمع
تقسیم	تفریق
به توان رساندن	ضرب
ریشه گرفتن	تقسیم

به این ترتیب، در این‌جا با اندیشهٔ اساسی مربوط به محاسبه‌های لگاریتمی سروکار داریم: هر عمل مربوط به دو جمله از یک دنباله، به عمل ساده‌تری روی دو جمله از دنبالهٔ دیگر، منجر می‌شود.

خود شتیفل به اهمیت کار خود واقف بود. او می‌نویسد: «می‌توان یک کتاب کامل دربارهٔ ویژگی‌های شگفتی‌آور عددها نوشت، ولی من در این‌جا به آن نمی‌پردازم و چشم بسته از کنار آن می‌گذرم».

ولی ریاضی‌دانان دیگر، چشم بسته از کنار آن نگذشتند و به این مقایسهٔ جالب دو دنباله (تصاعد حسابی و تصاعد هندسی)، علاقه نشان دادند.

۳. بورگی اندیشهٔ شتیفل را دنبال کرد و جدول‌های او را تکمیل کرد. گرچه جدول‌های بورگی، از نظر تاریخی، بعد از جدول‌های نپر تنظیم شد، ولی به دلیل ساده‌تر بودن آن‌ها، نخست به جدول‌های بورگی می‌پردازیم.

بورگی مدتی در قصر یک شاهزادهٔ با نفوذ آلمانی، به عنوان ریاضی‌دان و آشنا به قانون‌های مکانیک کار می‌کرد. او با کپلر آشنا بود و به نیازهای اخترشناسی وارد بود.

بورگی جدول‌های خود را در سال‌های از ۱۶۰۳ تا ۱۶۱۱ میلادی تنظیم کرد که در سال ۱۶۲۰، با عنوان «جدول‌های تصاعدهای حسابی و هندسی» چاپ شد.

این طور به نظر می‌رسد که بورگی متوجه شد، برای عملی‌تر کردن اندیشهٔ شتیفل، باید فاصلهٔ بین جمله‌های مجاور در تصاعد، بزرگ نباشد و، برای این منظور، باید تصاعدی را انتخاب کند که تغییر جمله‌های آن کند باشد، یعنی قدر نسبتی نزدیک به ۱ داشته باشد. او تصاعدی با قدر نسبت برابر ۱/۰۰۰۱ انتخاب کرد و دو دنبالهٔ عددی در نظر گرفت: دنبالهٔ اول، یک تصاعد حسابی با جملهٔ عمومی $y = ۱۰n$ (یعنی عددهای ۱۰، ۲۰، ۳۰، ...) که آن‌ها را عددهای قرمز می‌نامید (و در جدول‌های خود، با رنگ قرمز چاپ می‌کرد)؛ و دنبالهٔ دوم، یک تصاعد هندسی با جملهٔ عمومی $۱۰^۸(۱/۰۰۰۱)^n$ که آن‌ها را عددهای سیاه می‌نامید. اگر عددهای قرمز را با عددهای سیاه، یعنی عددهای $y = ۱۰n$ را با عددهای $x = ۱۰^۸(۱/۰۰۰۱)^n$ مقایسه کنیم،

به دست می‌آید:

$$\frac{x}{10^8} = \left[\left(1 + \frac{1}{10^4}\right)^{10^4}\right] \cdot \frac{y}{10^5}$$

اگر $\left(1 + \frac{1}{10^4}\right)^{10^4}$ را با طرف E نشان دهیم، آن‌وقت

$$\frac{y}{10^5} - \log E \frac{x}{10^8} \Rightarrow y = 10^5 E \frac{x}{10^8}$$

عدد E به عدد e بسیار نزدیک است (۴§ را در همین فصل ببینید). عدد

e = ۲/۷۱۸۲۸۱

همان مبنای لگاریتم طبیعی است.

اگر بخواهیم دقیق‌تر بگوییم، جدول‌های بورگی، عکس جدول‌های لگاریتم است، یعنی به یاری آن‌ها می‌توان با در دست داشتن لگاریتم یک عدد، خود عدد را پیدا کرد (در ریاضیات، به چنین جدول‌هایی، **جدول‌های آنتی‌لگاریتم** می‌گویند).

۴. جدول‌های نپر، خیلی بیشتر و گسترده‌تر از جدول‌های بورگی، مورد توجه و استفاده قرار گرفت.

نپر در سال ۱۵۵۰ در نزدیکی اِدین بورو (یا اِدین بورگ) در اسکاتلند متولد شد. از ۱۶ سالگی به اروپا رفت و ۵ سال در دانشگاه‌های مختلف آن‌جا، به فراگیری ریاضیات و دانش‌های دیگر پرداخت. از سال ۱۵۷۱ تا پایان عمر (در سال ۱۶۱۷)، بدون هیچ سفری، در ملک شخصی خود زندگی کرد و، همچون برخی از دانشمندان آن زمان، به اخترشماری (تعیین سرنوشت از روی حرکت ستارگان) و دیگر «دانش»های دروغین مشغول بود.

نپر، در عین حال، به اخترشناسی و ریاضیات علاقه‌مند بود و، خیلی جدی، به آن‌ها می‌پرداخت. هنوز در هر کتاب «مثلثات کروی» با نام نپر، به صورت «قاعدهٔ نپر» و «معیار نپر» روبه‌رو می‌شویم.

نپر در سال‌های ۸۰ سده شانزدهم، به اندیشهٔ محاسبه‌های لگاریتمی رسید. ولی جدول‌های خود را، بعد از ۲۵ سال محاسبه، در سال ۱۶۱۴ با عنوان «شرح جدول‌های عجیب لگاریتمی» چاپ کرد که شامل جدول‌های لگاریتمی تابع‌های مثلثاتی بود.

لگاریتم‌های نپر، رابطهٔ نزدیکی با لگاریتم طبیعی دارد. لگاریتم x با محاسبهٔ نپر (که ما آن را با Lx نشان می‌دهیم)، با لگاریتم طبیعی x ($\ln x$)، به وسیله این برابری به هم مربوط‌اند:

$$Lx = ۱۰^{۷} \ln \frac{x}{۱۰^{۷}}$$

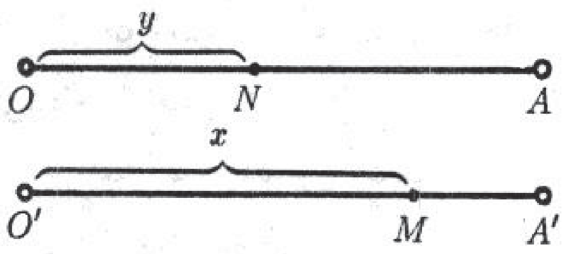
نپر دربارهٔ چگونگی تنظیم این جدول‌ها، در کتاب خود «ساختن جدول‌های عجیب لگاریتمی» که دو سال بعد از مرگ او (در سال ۱۶۱۹) چاپ شد، توضیح داده است.

اصطلاح«لگاریتم»هم متعلق به نپر است که از واژه‌های یونانی «لوگوس» به معنی نسبت و «ارتیموس» به معنی عدد گرفته شده است. او، به‌جز اصطلاح «لگاریتم»، از اصطلاح «عدد ساختگی» هم استفاده می‌کرد.

**نپر، تعریف لگاریتم را، با استفاده از دانش مکانیک و اصطلاح‌های این دانش می‌دهد. فرض کنید

$$|OA| = |O'A| = r$$

درضمن، فرض کنید، نقطهٔ M روی خط راست $O'A'$، از O' به طرف A'، به طور یکنواخت (یعنی با سرعتی ثابت) حرکت کند، به نحوی که



شکل ۴۱

درست بعد از یک ساعت به نقطهٔ A' برسد. متحرک دیگری، هم زمان با متحرک اول، از A به طرف O حرکت می‌کند، ولی حرکت او یکنواخت نیست و سرعتی متغیر دارد؛ سرعت نقطهٔ N، در هر لحظه، چنان است که اگر با همان سرعت به صورتی یکنواخت به سمت O برود، درست بعد از یک ساعت به آن‌جا برسد. فرض کنید در لحظه‌ای که داشته باشیم $x = |O'M|$، فاصله از O تا N برابر y باشد: $y = |ON|$. نپر فاصلهٔ x را لگاریتم فاصلهٔ y می‌نامد: $x = Ly$. به یاری ریاضیات امروزی می‌توان ثابت کرد:

$$x = -r \ln \frac{y}{r}$$

اگر $r = 1$، آن وقت $x = -\ln y$. نپر r را برابر ۱۰ می‌گیرد که، در این صورت، مثلاً برای $y = 1$، برای x مقداری مخالف صفر به دست می‌آید.

□

جدول‌ها و اندیشه‌های نپر، به سرعت پراکنده شد در سال ۱۶۱۸، کتاب نپر از زبان لاتینی به انگلیسی ترجمه شد و، یک سال بعد، در سال ۱۶۱۹، به صورتی گسترده، مورد استفاده کپلر قرار گرفت. وقتی کپلر در سال ۱۶۲۰، جدول‌های اخترشناسی خود را چاپ کرد، به عنوان سپاس‌گزاری، نامه‌ای در آن قرار داد که خطاب به نپر بود و از او به خاطر کشف جدول‌های لگاریتمی، که

برای اخترشناسان بی‌اندازه با ارزش است، تشکر کرده بود (کپلر نمی‌دانست، نپر در سال ۱۶۱۷ مرده است).

۵. نپر در سال‌های ۱۶۱۵_۱۶۱۶، با هنری بریگ (۱۵۵۶_۱۶۳۰)، استاد ریاضی ملاقات کرد. با سفارش نپر بود که بریگ، به تنظیم جدول‌های لگاریتمی دهدهی مشغول شد (این جدول‌ها، تا چهارده رقم بعد از ممیز را به دست می‌داد). بریگ این جدول‌ها را در سال ۱۶۲۴، در کتابی با عنوان «حساب لگاریتمی» چاپ کرد.

برای این که تصوری دربارهٔ این محاسبه‌های سترگ به دست آورید، مثالی می‌آوریم. بریگ می‌دانست که، برای عددهای به اندازهٔ کافی بزرگ m، این برابری تقریبی درست است:

$$\ln a \approx m(a^{\frac{1}{m}} - ۱)$$

و یا دقیق‌تر

$$m\frac{\sqrt[m]{a} - ۱}{\sqrt[m]{a}} < \ln a < m(\sqrt[m]{a} - ۱)$$

بریگ برای این‌که مقدار $\ln ۱۰$ را با ۱۴ رقم بعد از ممیز پیدا کند، فرض می‌کند $m = ۲^{۵۴}$ و مقدار $\ln ۱۰$ را با دستور زیر به دست می‌آورد:

$$\ln ۱۰ \approx ۲^{۵۴}(\sqrt[۲^{۵۴}]{۱۰} - ۱)$$

او ۵۴ بار پشت سر هم، جذر ۱۰ را تا ۳۲ رقم بعد از ممیز پیدا می‌کند، عدد ۱ را از آن کم و، سپس، نتیجه را ۵۴ بار دو برابر می‌کند. در پایان کار، ۱۴ رقم بعد از ممیز را نگه می‌دارد. جدول‌های بریگ، شامل لگاریتم عددهای از ۱ تا ۲۰۰۰۰ و از ۹۰۰۰۰ تا ۱۰۰۰۰۰ است.

جدول‌های لگاریتم همهٔ عددهای پنج رقمی، در سال ۱۶۲۸، به وسیلهٔ آدریان ولاک هلندی که فروشندهٔ کتاب و، درضمن، علاقه‌مند به ریاضیات بود، چاپ شد.

بعد از بریگ و ولاک، کارها روی ساده‌تر کردن جدول‌ها و برطرف کردن اشتباه‌ها متمرکز شد. درضمن، کتاب‌ها، به جز جدول‌های لگاریتم، شامل سایر جدول‌ها و حتا کوتاه شده درس‌ها بود. مثلاً جدول‌های ۸ رقمی کاله، در پایان سدهٔ هجدهم چاپ شد و جدول‌های هفت‌رقمی وه‌گا، بارها و بارها، چاپ شد و در اختیار علاقه‌مندان قرار گرفت.

کار محاسبهٔ لگاریتم، با کشف دستور

$$\ln(۱+x) = x - \frac{x^۲}{۲} + \frac{x^۳}{۳} - \frac{x^۴}{۴} + \dots (|x| < ۱)$$

که به وسیلهٔ نیکلای مرکاتور ریاضی‌دان آلمانی در سال ۱۶۶۷ در کتاب او به نام «فن لگاریتم گرفتن» آمده بود، بسیار ساده‌تر شد. از همین دستور می‌توان نتیجه گرفت که با شرط $|x| < ۱$

$$\ln\frac{۱+x}{۱-x} = ۲\left(x + \frac{x^۳}{۳} + \frac{x^۵}{۵} + \dots\right)$$

به کمک این دستور، می‌توان لگاریتم هر عدد $N > ۱$ را به دست آورد. برای این منظور، باید عدد N را به صورت $N = \frac{۱+x}{۱-x}$ نوشت (که در آن، $x = \frac{N-۱}{N+۱}$ از واحد کوچکتر است).

□

بعد از پدید آمدن جدول‌های لگاریتمی، خیلی زود، ابزارهای محاسبهٔ لگاریتمی هم کشف شد.

در سال‌های ۱۶۲۳ تا ۱۶۲۷، گونتر انگلیسی، نخستین خط‌کش محاسبهٔ لگاریتمی را ساخت و پس از او، و بر همان اساس نمونه‌های گوناگون دیگری از این ابزار به بازار عرضه شد که، البته، یکی تکمیل‌تر از دیگری بود.

تا مدت‌ها، لگاریتم را، بر اساس مقایسهٔ جمله‌های دو تصاعد حسابی و هندسی می‌فهمیدند، تا این که در میانه‌های سدهٔ هجدهم میلادی، لئونار اولر، تابع لگاریتمی را، به عنوان عکس تابع نمایی تعریف کرد و مورد بررسی قرار داد.

تمرین‌ها

۱۵۶. حاصل هریک از این عبارت‌ها را به دست آورید:

$$۱)\ \log_{۲} ۱۶ + \log_{۱۶} ۲; \qquad ۲)\ \log_{\sqrt{۳}} ۸۱ + \log_{۸۱} \sqrt{۳};$$

$$۳)\ \log_{۱۲۵} ۶۲۵ - \log_{۲۷} ۸۱; \qquad ۴)\ \log_{۲۱} ۷ + \log_{۲۱} ۳;$$

$$۵)\ \log_{۲} \left(\frac{۲}{۳}\right) + \log_{۲} \left(\frac{۹}{۴}\right); \qquad ۶)\ \frac{\log ۳ + \log ۱۲}{۱ + \log(\frac{۱۸}{۵})};$$

$$۷)\ \frac{\log_{۴} ۲۷}{\log_{۴} ۳} + \log_{۲} \left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right); \qquad ۸)\ \frac{\log_{۵} ۱۶ - \log_{۵} ۸}{\log_{۵} ۱۲۸};$$

$$۹)\ \frac{\log_{۵} ۲۵۰}{\log_{۵۰} ۵} - \frac{\log_{۵} ۱۰}{\log_{۱۲۵۰} ۵}; \qquad ۱۰)\ \frac{\log_{۲} ۲۴}{\log_{۹۶} ۲} - \frac{\log_{۲} ۱۹۲}{\log_{۱۲} ۲}$$

۱۵۷. مقدار x را پیدا کنید:

$$۱)\ \lg x = ۲\lg a + ۳\lg b - ۵\lg c;$$

$$۲)\ \lg x = \lg a + \frac{۱}{n}\lg(a+b) - \frac{۱}{n}\lg(a-b);$$

$$۳)\ \lg x = -\frac{۱}{۲}\lg a +$$

$$+\frac{۱}{۴} \cdot \left[\lg b - \frac{۲}{۳}\lg a + \frac{۲}{۳}\lg(a-b) - \frac{۱}{۲}\lg(a+b)\right];$$

$$۴)\ \log_{۳}(x+۲) = ۲;$$

$$۵)\ \log_{\frac{۱}{۶}}(x-۱) + \log_{\frac{۱}{۶}}(۵x+۳) = -۲;$$

$$۶)\ \log_{a}(۱ - \sqrt{۱+x}) = \log_{a^{۲}}(۳ - \sqrt{۱+x});$$

$$۷)\ \log_۳(۴ \times ۳^{x-۱} - ۱) = ۲x - ۱;$$

$$۸)\ \log_{x-۱}(x^۲ - ۵x + ۱۰) = ۲;$$

$$۹)\ \log_{x^۲} a + \log_{a^۲} x = ۱$$

۱۵۸. این نامعادله‌ها را حل کنید:

$$۱)\ \log_۲ x > ۴; \qquad ۲)\ |\log_۲ x| < ۳;$$

$$۳)\ \lg(۱ - x) < ۱; \qquad ۴)\ \lg(x^۲ + ۷x + ۲۰) > ۱;$$

$$۵)\ \lg^۲\sqrt{x} - ۳\lg\sqrt{x} + ۲ < ۰;$$

$$۶)\ \log_{\frac{۱}{۲}}(x - ۱) + \log_{\frac{۱}{۲}}(x + ۱) > \log_{\frac{۱}{۲}} ۳;$$

$$۷)\ \frac{۱ + \log_a^۲ x}{۱ + \log_a x} > ۱, ۰ < a < ۱$$

۱۵۹. کدام بزرگترند؟

۱) $\log_{۱۱} ۱۰$ یا $\log_{۱۰} ۱۱$؛ ۲) $\log_{۱۴} ۱۵$ یا $\log_{۱۶} ۱۵$؛

۳) $\log_۵ a$ یا $\log_۶ a$؛ ۴) $\log_۳ ۴$ یا $\log_۵ ۶$

*۵) $\lg ۱۱$ یا $\log_۹ ۱۰$؛ *۶) $\log_۷ ۱۰$ یا $\log_{۱۱} ۱۳$.

۱۶۰. دامنهٔ تابع‌های با ضابطهٔ زیر را پیدا کنید؛ به زبان دیگر، به‌ازای چه مقدارهایی از x، مقدار y معین است:

$$۱)\ y = \log_۵(-۴x); \quad ۲)\ y = \log_۳(۵x + ۹);$$
$$۳)\ y = \lg(x^۲ - ۱); \quad ۴)\ y = ۲^{\frac{۵}{x^۲-۳}}$$

۱۶۱. اگر $\log_۶ ۳ = a$، مطلوب است محاسبهٔ

$$۱)\ \log_۶ ۲; \qquad ۲)\ \log_{۲۴} ۴۸;$$
$$۳)\ \log_۳(\sqrt{۶})^۵; \quad ۴)\ \log_{۳\sqrt{۶}}(۱۸)$$

۱۶۲. ۱) به شرط $\lg ۲ = a$ و $\lg ۱۳ = b$، $\log_۵(۳/۳۸)$ را پیدا کنید؛ ۲) به شرط $\log_{۱۲} ۵ = a$ و $\log_{۱۲} ۱۱ = b$، $\log_{۲۷۵} ۶۰$ را پیدا

کنید؛ ۳) به شرط $\log_{۲} ۳ = a$ و $\log_{۳} ۵ = b$، اولاً $\log_{۶} ۳۰$، ثانیاً $\log_{۳۰۰} ۷۵$ را به دست آورید.

۱۶۳. اگر $\log_p q = \sqrt{۵}$، محاسبه کنید:

$$۱)\ \log_{\frac{p}{\sqrt{q}}}(\sqrt[۳]{p^{۲}q^{۵}};\qquad ۲)\ \log_{\sqrt{pq}}\left(\frac{q}{\sqrt{p}}\right)$$

***۱۶۴.** کدام بزرگترند:

۱) $\log_{۲} ۳$ یا $\log_{۳} ۴$؛ ۲) $\log_{۲} ۵$ یا $\log_{۳} ۱۱$؛

۳) $\log_{۲} ۵$ یا $\log_{۳} ۱۲$؛ ۴) $\log_{۲} ۵$ یا $\log_{۳} ۱۳$؟

۱۶۵. این معادله‌ها را حل کنید:

$$۱)\ ۳^{x} \cdot ۸^{\frac{x}{x+۱}} = ۳۶;\qquad ۲)\ ۳^{x} + ۴^{x} = ۵^{x};$$

$$*۳)\ \log_{۶}\left(۶^{\frac{۱-۲x}{۲x-۲}} + \frac{۲۳}{۶}\right) = \log_{۶} ۴ + \frac{۱-x}{۳x-۲};$$

$$*۴)\ \frac{x}{۱۸} = \left(\frac{۲}{۳}\right)^{\log_x ۱۲};\qquad *۵)\ \frac{۹x}{۴} = \left(\frac{۲۷}{۲}\right)^{\log_x ۶};$$

$$*۶)\ x^{۲} + (x-۳)\log_{۲} x = ۴x - ۳$$

***۱۶۶.** به ازای چه مقدارهایی از a، معادلهٔ

$$\log_{(a-۴)(۱۰-a)}(-x^{۲} + ۴x - ۳) =$$
$$= \log_{(a-۴)(۱۰-a)}(x - ۰/۲۵a - ۱)(x - ۰/۵a - ۲)$$

دارای تنها یک جواب است؟

***۱۶۷.** همهٔ مقدارهای a را پیدا کنید که، به ازای هر یک از آن‌ها، معادلهٔ زیر، درست سه ریشه داشته باشد:

$$۴^{-|x-a|} \cdot \log_{\sqrt{۳}}(x^{۲} - ۲x + ۳) +$$
$$+ ۲^{-x^{۲}+۲x} \cdot \log_{\frac{۱}{۳}}(۲|x-a| + ۲) = ۰$$

*۱۶۸. این نامعادله را حل کنید:

$$\frac{\sqrt{x-۵}}{\log_{\sqrt{۲}}(x-۴)-۱} \geq ۰$$

*۱۶۹. این معادله را حل کنید:

$$\frac{۱}{\sqrt{۳x-۵}} = (۳x-۵)\log_{\frac{۱}{۲۵}}(۲+۵x-x^{۲})$$

۱۷۰. این نامعادله را حل کنید:

$$\log_{۷} x - \log_{x}\left(\frac{۱}{۷}\right) \geq ۲$$

۱۷۱. این معادله را حل کنید:

$$۳\sqrt{\log_{۳} x} - \log_{۳}(۳x) - ۱ = ۰$$

۱۷۲. شیر را با درجهٔ حرارت نخستینِ $t_h = ۳۰^\circ$، در زمان $z_۱ = \frac{۱۷}{۵}$ ساعت، در محیطی با درجهٔ حرارت $t_۰ = ۲۵^\circ$ جابه‌جا می‌کنند. درجهٔ t_k، حرارت شیر را، بعد از جابه‌جایی پیدا کنید، به شرطی که

الف) شیر در پیت‌های سرپوشیده‌ای جابه‌جا شود که در هوای آزاد قرار دارند؛ سطح کل هر پیت $F = ۰/۶۶$ متر مربع و حجم آن $v = ۵۰$ لیتر است؛

ب) شیر در مخزن‌های بزرگ سرپوشیده‌ای جابه‌جا شود که در جریان هوای آزاد قرار دارند. عمق مخزن $l = ۳$ متر و قطر قاعدهٔ آن $d = ۱$ متر است. درضمن، می‌دانیم، t_k از این معادله به دست می‌آید:

$$\lg\frac{t_۰ - t_h}{t_۰ - t_k} = \frac{۰/۴۳۴F \cdot k \cdot z}{M \cdot C}$$

که در آن، F سطح ظرف به متر مربع، M وزن شیر به کیلوگرم، C حرارت مخصوص شیر برابر ۰٫۹۴، k ضریب هدایت گرما که، در این‌جا، برابر است با ۱۰؛ وزن مخصوص شیر را ۱٫۰۳۲ (کیلوگرم بر دسی‌متر مکعب) بگیرید.

۱۷۳. مقاومت بتون بعد از ۳۰ روز $(R_{۳۰})$، برابر ۱ کیلوگرم بر سانتی‌متر مربع می‌شود. بعد از چند روز، مقاومت بتون (R_n)، برابر ۲ کیلوگرم بر سانتی‌متر مربع خواهد شد؟ می‌دانیم، مقاومت بتون را، بعد از n روز از این برابری به دست می‌آورند:

$$R_n = \frac{\lg n}{\lg ۳۰} \cdot R_{۳۰}$$

۱۷۴. برای این تابع‌ها، تابع‌های عکس را پیدا کنید. در هر حالت، نمودار تابع مستقیم و تابع عکس را رسم کنید:

$$۱)\ y = ۴ - ۳x; \quad ۲)\ y = ۲^{x+۱}$$

۱۷۵. دامنه و برد تابع با ضابطهٔ $y = \sqrt{\lg \cos x}$ را پیدا کنید.

۱۷۶. چگونه می‌توان نمودار $y = \log_{\frac{۱}{۲}} x$ را، با در دست داشتن نمودار $y = \log_{۲} x$ رسم کرد؟

۱۷۷. نمودار تابع با ضابطهٔ $y = \log_{\frac{۱}{۲}}(۴ - ۲x)$ را رسم کنید.

۱۷۸. نمودار تابع با ضابطهٔ $\log_{\frac{۱}{۲}} |x| - ۱$ را رسم کنید.

*۱۷۹. فانوس دریایی با چراغی تامین شده است که، شدت نور آن، برابر ۶۵۰۰ کارسل است («کارسل»، واحد شدت نور و، به تقریب، برابر ۸ شمع است). کمترین شدت نوری که می‌توان از فاصلهٔ یک کیلومتری تشخیص داد، به تقریب، برابر ۰٫۰۱ کارسل است. شفافیت و نور گذرانی هوا (وقتی صاف باشد) چنان است که، اگر نور از لایهٔ یک کیلومتری عبور کند، ۰٫۹ انرژی خود را نگه می‌دارد. فاصله r را که، در آن، می‌توان از عمل فانوس دریایی بهره گرفت، پیدا کنید.

۹. نمودار تابع‌های مثلثاتی

§۱. تابع‌های متناوب

۱. در زندگی و در طبیعت به پدیده‌هایی برمی‌خوریم که حرکت یا تغییر آن‌ها تکراری است. خورشید، در حرکت ظاهری خود، هر ۲۴ ساعت یک بار زمین را دور می‌زند؛ آونگ ساعت دیواری، حرکتی تکراری دارد و، معمولاً، هر دو ثانیه یک بار حرکت خود را به راست و چپ تکرار می‌کند؛ عقربهٔ دقیقه شمار ساعت مچی شما، هر ۶۰ دقیقه یک بار ساعت را دور می‌زند. این‌گونه پدیده‌ها را، **پیامدهای متناوب** یا **پدیده‌های دوره‌ای** گویند.

به حرکت عقربهٔ دقیقه شمار ساعت بیشتر توجه کنیم. اگر زمان را متغیر مستقل و جای عقربهٔ دقیقه‌شمار را تابع آن بگیریم، کافی است جای عقربه (یعنی تابع) را در جریان ۶۰ دقیقه مطالعه کنیم، در این صورت، برای ۶۰ دقیقه‌های بعدی هم، جای عقربه را خواهیم دانست. اگر مثلاً ۷ دقیقه بعد از نیمه شب، جای عقربهٔ دقیقه شمار را با علامتی در روی ساعت خود مشخص کنیم، آن وقت، بدون این که به ساعت نگاه کنیم، مطمئن هستیم که در ساعت‌های ۱ و ۷ دقیقه، ۲ و ۷ دقیقه، ۳ و ۷ دقیقه و غیره، در همان جایی قرار دارد که علامت گذاشته‌ایم. این ۶۰ دقیقه (یعنی یک ساعت) را، **دورهٔ تناوب** یا **دورهٔ گردش** عقربهٔ دقیقه شمار می‌نامیم و، برای مطالعهٔ حرکت

آن و یا جای آن، کافی است، تنها در یک دورهٔ تناوب، یعنی در ۶۰ دقیقه، آن را بررسی کنیم.

۲. در ریاضیات هم، با چنین پدیده‌هایی برخورد می‌کنیم. ضمن رسم تابع با ضابطهٔ $y = x - [x]$ (مسالهٔ ۱۶۲ـ۱؛ بخش حل مساله‌ها در همین کتاب) دیدیم، کافی است نمودار تابع را تنها برای $0 \leq x < 1$ رسم کنیم تا بتوانیم تمامی نمودار آن را پیش خود مجسم کرده باشیم: نمودار تابع برای $1 \leq x < 2$ یا $2 \leq x < 3$؛ همچنین برای $-1 \leq x < 0$، $-2 \leq x < -1$ و غیره به همان صورتی است که برای $0 \leq x < 1$ بود؛ یعنی اگر برای $x = \frac{1}{2}$، به دست می‌آید $y = \frac{1}{2}$، برای $x = 1 + \frac{1}{2}$ یا $x = 2 + \frac{1}{2}$ یا $x = -1 + \frac{1}{2}$ و غیره هم، برای y، همان مقدار $y = \frac{1}{2}$ پیدا می‌شود. در این‌جا، دورهٔ تناوب تابع $T = 1$ است، زیرا اگر یک واحد به x اضافه یا یک واحد از آن کم کنیم، مقدار y تغییر نمی‌کند.

$$y = f(x) = x - [x],$$
$$f(x+1) = (x+1) - [x+1] =$$
$$= x + 1 - 1 - [x] = x - [x] = y$$
$$f(x-1) = (x-1) - [x-1] =$$
$$= x - 1 - (-1 + [x]) = x - [x] = y$$

این ویژگی، خاص $y = x - [x]$ نیست. بسیاری از تابع‌های مثلثاتی، دارای همین ویژگی‌اند. مثلاً برای $y = \sin x$، اگر 2π از x کم یا به آن اضافه کنیم، مقدار y تغییر نمی‌کند:

$$y = f(x) = \sin x,$$
$$f(x + 2\pi) = \sin(x + 2\pi) = \sin x = y,$$
$$f(x - 2\pi) = \sin(x - 2\pi) = \sin x = y$$

دورهٔ تناوب $\sin x$ برابر است با ۲π.

۳. روشن است، اگر عدد T دورهٔ تناوب یک تابع باشد، عددهای $۲T$، $۳T$، ...، nT $(n \in \mathbf{N})$ هم می‌توانند دورهٔ تناوب به حساب آیند. ولی در ریاضیات، کوچکترین عدد مثبتی را که بتوان برای دورهٔ تناوب انتخاب کرد، دورهٔ تناوب تابع می‌نامند.

۴. تعریف. *عدد مثبت T را دورهٔ تناوب $f(x)$ گوییم، وقتی که، برای هر مقدار x از دامنهٔ $f(x)$، دو مقدار $x+T$ و $x-T$ هم به دامنهٔ $f(x)$ تعلق داشته باشند و، درضمن کوچکترین عددی باشد که، برای آن، برابری*

$$f(x+T)=f(x)$$

برقرار باشد.

مثلاً، برای $f(x)=\mathrm{tg}x-\cot x$، $T=\frac{\pi}{۲}$ دورهٔ تناوب است، زیرا

$$f\left(x+\frac{\pi}{۲}\right)=\mathrm{tg}\left(x+\frac{\pi}{۲}\right)-\cot\left(x+\frac{\pi}{۲}\right)$$
$$=-\cot x+\mathrm{tg}x=f(x)$$

درضمن، اگر $x \neq k\frac{\pi}{۲}$ $(k \in \mathbf{Z})$، یعنی x متعلق به دامنهٔ $f(x)$ باشد، $x+\frac{\pi}{۲}$ و $x-\frac{\pi}{۲}$ متعلق به دامنهٔ $f(x)$ خواهند بود.

۵. تعیین دورهٔ تناوب در تابع‌های مثلثاتی. در حالت‌های بغرنج، روشی ساده و مشخص، برای تعیین دورهٔ تناوب یک تابع وجود ندارد. با وجود این، دربارهٔ تابع‌های سادهٔ مثلثاتی، می‌توان به راهنمایی‌هایی، برای پیدا کردن دورهٔ تناوب، توجه کرد.

۱) دورهٔ تناوب، برای $\sin x$ و $\cos x$ برابر ۲π و برای $\mathrm{tg}x$ و $\cot x$ برابر π است.

۲) اگر سینوس یا کسینوسی دارای توان زوج باشد (مثل $\sin^{۲} x$ یا $\cos^{۴} x$)، دورهٔ تناوب برابر π می‌شود.

۳) برای $\sin kx$ و $\cos kx$، دورهٔ تناوب برابر $\frac{۲\pi}{k}$ و برای $\operatorname{tg} kx$ و $\cot kx$ برابر $\frac{\pi}{k}$ است.

۴) برای مجموعی مثل $\sin k_۱ x + \sin k_۲ x$، باید دورهٔ تناوب را، برای هر جمله به طور جداگانه پیدا کرد و، سپس، کوچکترین مضرب مشترک بین دو عدد حاصل را به دست آورد.

مثال ۱. *دورهٔ تناوب را برای این تابع‌ها پیدا کنید:*

$$۱)\ f(x) = \sin ۳x; \qquad ۲)\ f(x) = \operatorname{tg} ۲x;$$
$$۳)\ f(x) = \sin ۲x + \cos ۳x; \quad ۴)\ f(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{۲}x\right)$$

حل. ۱) $T = \frac{۲\pi}{۳}$، زیرا

$$f\left(x + \frac{۲\pi}{۳}\right) = \sin ۳\left(x + \frac{۲\pi}{۳}\right) =$$
$$\sin(۳x + ۲\pi) = \sin ۳x = f(x),$$

و به همین ترتیب $f\left(x - \frac{۲\pi}{۳}\right) = f(x)$.

۲) $T = \frac{\pi}{۲}$، زیرا

$$f\left(x + \frac{\pi}{۲}\right) = \operatorname{tg} ۲\left(x + \frac{\pi}{۲}\right) = \operatorname{tg}(۲x + \pi) = \operatorname{tg} ۲x = f(x)$$

۳) برای $\sin ۲x$: $T_۱ = \frac{۲\pi}{۲} = \pi$ وبرای $\cos ۳x$: $T_۲ = \frac{۲\pi}{۳}$؛

چون $\pi = ۱۸۰^\circ$ و $\frac{۲\pi}{۳} \times ۱۲۰^\circ$ و کوچکترین مضرب مشترک بین ۱۸۰

و ۱۲۰ برابر ۳۶۰ است و $2\pi = 360^\circ$، پس $T = 2\pi$:

$$f(x + 2\pi) = \sin 2(x + 2\pi) + \cos 3(x + 2\pi) =$$
$$= \sin(2x + 4\pi) + \cos(3x + 6\pi) = \sin 2x + \cos 3x = f(x)$$

۴) $T = \dfrac{\pi}{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{2\pi}{\pi} = 2$:

$$f(x+2) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{2}(x+2) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}x + \pi\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}x\right) = f(x)$$

§۲. نمودار تابع‌های مثلثاتی ساده

روشن است که، برای رسم نمودار یک تابع متناوب، کافی است این نمودار را در فاصله‌ای برابر یک دور تناوب پیدا کنیم، انتقال همین نمودار به سمت راست یا به سمت چپ، می‌تواند دنباله آن را به دست دهد.

مثال ۲. *مطلوب است رسم نمودار* $y = \sin x$.

حل. دورهٔ تناوب $\sin x$ برابر است با 2π. بنابراین کافی است نمودار را در فاصله‌ای از x که برابر 2π باشد، رسم کنیم. می‌توان $0 \leq x \leq 2\pi$ یا $-\pi \leq x \leq \pi$ یا مثلاً $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ در نظر گرفت. توجه داشته باشیم، در این‌جا، x یک عدد است و باید بر حسب رادیان بیان شده باشد. وقتی مثلاً می‌گوییم $x = \frac{\pi}{2}$، باید π را به تقریب برابر ۳/۱۴ (یا حتا با تقریب کمتری برابر ۳) گرفت.

چرا کمان‌ها را باید بر حسب رادیان در نظر گرفت؟

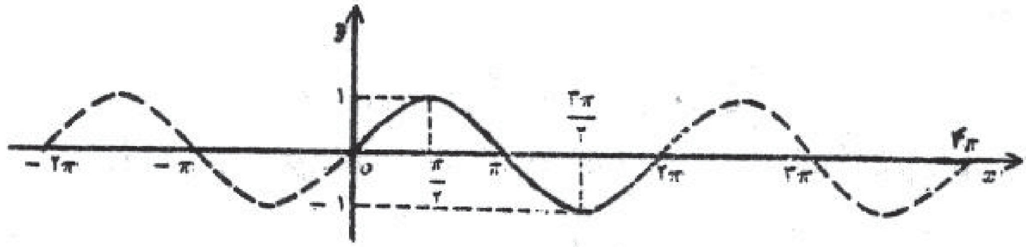
وقتی می‌گوییم $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$، یعنی $\sin \frac{\pi}{6}$ برابر است با $\frac{1}{2}$ شعاع دایره‌ای که به عنوان دایرهٔ مثلثاتی انتخاب کرده‌ایم. به این ترتیب، در مثلثات، واحد اندازه‌گیری ما شعاع دایره است. در دستگاه محورهای مختصات، همیشه بهتر

است، طول بردار واحد، روی محور $x'x$ با طول بردار واحد روی محور $y'y$ یکی باشد. بنابراین، برای نمودار $y = \sin x$، وقتی می‌گوییم نقطهٔ $A\left(\frac{\pi}{۲}, ۱\right)$ روی نمودار است، باید x_A با همان واحدی در نظر گرفته شده باشد که y_A با آن واحد در نظر گرفته شده است: $y_A = ۱$، یعنی عرض نقطه با واحد شعاع دایرهٔ مثلثاتی بیان شده است، پس x_A هم باید با همان واحد در نظر گرفته شود و می‌دانیم، اگر بخواهیم واحد کمان را، برابر طول شعاع دایره بگیریم، به آن «رادیان» می‌گویند: *کمان یک رادیان، یعنی کمانی از دایره که طولی برابر طول شعاع همان دایره داشته باشد*. به این دلیل است که، به ویژه ضمن رسم نمودارها، باید کمان‌ها را با واحد رادیان در نظر گرفت. نقطه $A\left(\frac{\pi}{۲}, ۱\right)$ یعنی به تقریب نقطهٔ با مختصات $(۱/۵۷, ۱)$ و یا، در عمل، نقطهٔ با مختصات $\left(\frac{۳}{۲}, ۱\right)$.

برای رسم نمودار، اول فاصله‌ای را برای π (یعنی به تقریب ۳)، در روی محور $x'x$ انتخاب کنید و، سپس، با توجه به آن، عددهای لازم را روی هریک از محورها به دست آورید.

نمودار $y = \sin x$ را، برای $۰ \leq x \leq ۲\pi$ رسم می‌کنیم.

کمترین مقدار $\sin x$ برابر -۱ (به‌ازای $x = \frac{۳\pi}{۲}$) و بیشترین مقدار آن برابر ۱ (به‌ازای $x = \frac{\pi}{۲}$) است. جدولی برای مقدارهای متناظر (x, y) تشکیل می‌دهیم و دو عدد $\frac{\pi}{۲}$ و $\frac{۳\pi}{۲}$ را (که به‌ازای آن‌ها، بیشترین و کمترین مقدار y به دست می‌آید)، از یاد نمی‌بریم و در جدول وارد می‌کنیم. بقیهٔ مقدارهای x، می‌توانند به دلخواه انتخاب شوند، ولی ساده‌تر آن است که نقطه‌های اصلی دایرهٔ مثلثاتی (۰، $\frac{\pi}{۲}$، π، $\frac{۳\pi}{۲}$ و ۲π) را در نظر بگیریم. البته روشن است، برای این که آغاز و پایان نمودار مشخص شود، $x = ۰$ و



شکل ۴۲

$x = ۲\pi$ را فراموش نمی‌کنیم.

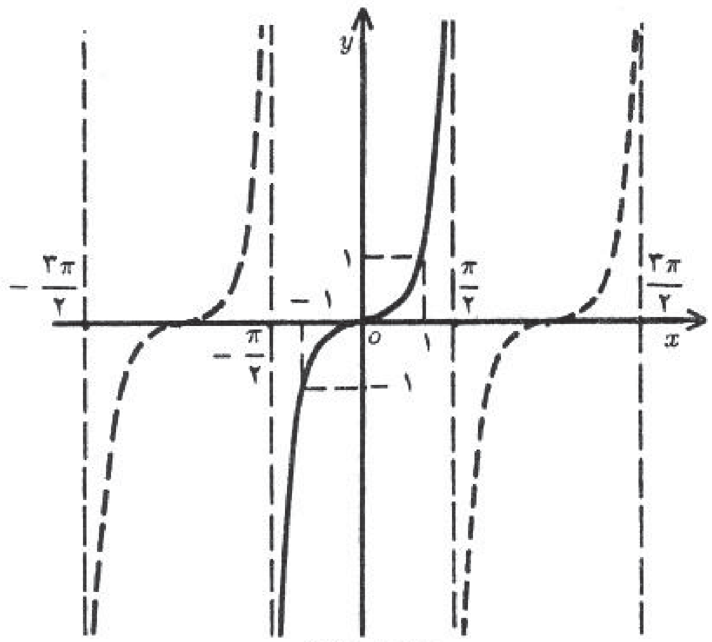
x	۰	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π
y	۰	۱	۰	-۱	۰

در شکل ۴۲، نمودار $y = \sin x$ برای $۰ \leq x \leq ۲\pi$ رسم شده، درضمن این نمودار برای $-۲\pi \leq x \leq ۰$ و $۲\pi \leq x \leq ۴\pi$ هم، به صورت نقطه‌چین داده شده است.

مثال ۳. *نمودار* $y = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{۲}x\right)$ *را رسم کنید.*

حل. دورهٔ تناوب $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{۲}x\right)$ برابر است با $۲ = \frac{\pi}{\frac{\pi}{۲}}$.

$\operatorname{tg}\alpha$، کمترین و بیشترین مقدار ندارد. هرچه α به $\frac{\pi}{۲}$ نزدیکتر شود، مقدار $\operatorname{tg}\alpha$ بزرگتر می‌شود، به نحوی که اگر α به $\frac{\pi}{۲}$ بسیار نزدیک باشد، $\operatorname{tg}\alpha$ عددی بسیار بزرگ می‌شود. به محض این که α از $\frac{\pi}{۲}$ تجاوز کند، مقدار $\operatorname{tg}\alpha$ منفی می‌شود و، سپس، به تدریج بزرگ می‌شود تا به‌ازای $\alpha = \pi$ به صفر می‌رسد. در ریاضیات می‌گویند $\operatorname{tg}\alpha$ در نقطه‌های $x = \frac{\pi}{۲}$ و $\frac{۳\pi}{۲}$ (یا $-\frac{\pi}{۲}$) ناپیوسته است. برای سادگی بیان، مقدار $\operatorname{tg}\alpha$ را، وقتی α در ربع اول و به اندازه کافی به $\frac{\pi}{۲}$ نزدیک شده است، برابر $+\infty$ و وقتی در ربع



شکل ۴۳

دوم به اندازهٔ کافی به $\frac{\pi}{۲}$ نزدیک باشد، برابر $-\infty$ می‌گیرند. جدول و نمودار $y = \operatorname{tg}x$ را برای $-\frac{\pi}{۲} < x < \frac{\pi}{۲}$ در نظر می‌گیریم (شکل ۴۳):

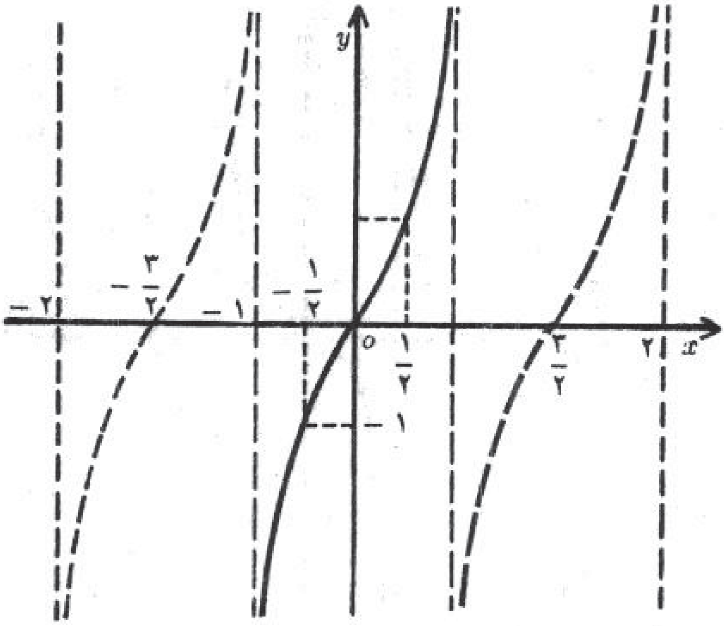
برای $y = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{۲}x\right)$، چون دورهٔ تناوب برابر است با ۲، نمودار را برای $-۱ < x < ۱$ رسم می‌کنیم. (شکل ۴۴).

چه در شکل ۴۳ و چه در شکل ۴۴، نمودارهای $y = \operatorname{tg}x$ و $y = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{۲}x\right)$ را، یک دورهٔ تناوب قبل و یک دورهٔ تناوب بعد از دورهٔ تناوب اصلی انتخابی، به صورت نقطه‌چین رسم کرده‌ایم.

تمرین‌ها

۱۸۰. این نمودارها را رسم کنید:

$$۱)\ y = \cos x; \quad ۲)\ y = \cot x;$$



شکل ۴۴

۱۸۱. نمودار هریک از تابع‌های زیر را رسم کنید:

$$۱)\ y = \sin x; \quad ۲)\ y = ۲\sin x; \quad ۳)\ y = \frac{۱}{۲}\sin x$$

۱۸۲. نموارهای $y = \sin x$ و $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{۴}\right)$ را در یک دستگاه محورهای مختصات رسم کنید.

۱۸۳. این سه نمودار را (برای مقایسهٔ با یکدیگر) رسم کنید، (در فاصلهٔ $۰ \leq x \leq ۲\pi$):

$$۱)\ y = \sin x; \quad ۲)\ y = \sin ۲x; \quad ۳)\ y = \sin\frac{x}{۲}$$

۱۸۴. این نمودارها را با هم مقایسه کنید:

۱) $y = \cos x$ و $y = \sin x$؛ ۲) $y = \cos x$ و $y = \cos ۲x$؛
۳) $y = \cos ۲x$ و $y = ۱ + \cos ۲x$؛ ۴) $y = ۱ + \cos ۲x$ و $y = \frac{۱ + \cos ۲x}{۲}$

*۱۸۵. این دو نمودار را در یک دستگاه محورهای مختصات رسم کنید:

$$y = \sin x,\ y = \sin x + \cos x$$

۱۸۶. این نمودار را رسم کنید:

$$y = \begin{cases} \ln x & (x > ۰) \\ \sin x & (x \leq ۰) \end{cases}$$

*۱۸۷. نمودار $y = \sin(\sin x)$ را رسم و با نمودار $y = \sin x$ مقایسه کنید.

*۱۸۸. این نمودارها را رسم کنید:

۱) $y = |\sin x|$;
۲) $y = \sin|x|$;
۳) $y = [\sin x]$;
۴) $y = \sin[x]$
۵) $y = \{\cos x\} = \cos x - [\cos x]$

پاسخ، راهنمایی و حل مساله‌ها

پیش از آغاز و یادآوری

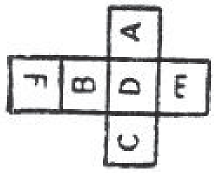
۱. پاسخ را در شکل ۴۴ می‌بینید. روی قاعدهٔ سه مکعب زیرین، حرف E نوشته شده است.

۲. در شکل ۴۵ نشان داده شده است، چگوه خطها را رسم کنیم تا با یکدیگر برخوردی نداشته باشند.

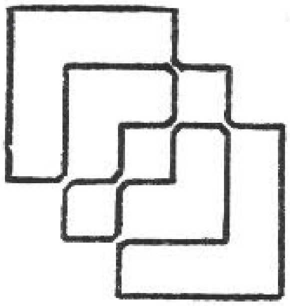
یادداشت ۱. برای آشنایی بیشتر با این‌گونه مساله‌ها، حل مسالهٔ ۴ از جلد اول «ریاضیات محاسبه‌ای» را در صفحه‌های ۲۱۹ تا ۲۲۳ ببینید.

یادداشت ۲. مسالهٔ ۲، متعلق به «چارلز دُدجون» ریاضی‌دان انگلیسی است که آن را در کتاب خود به نام «آلیس در سرزمین شگفتی‌ها» با نام مستعار «لوئیس که‌رول» آورده است. او به این مساله علاقه داشت و، اغلب، آن را برای دوستان کوچک خود مطرح می‌کرد.

۳. فرض کنیم، طرف صحبت من، به واقع، خود A باشد؛ یعنی در روز گفت‌وشنود راست می‌گوید. بنابراین، باید به پرسش بعدی هم درست پاسخ داده باشد، یعنی روز گفت و شنود روز دوشنبه باشد. ولی A، روزهای دوشنبه دروغ می‌گوید. تناقض موجود، نشان می‌دهد که، طرف صحبت من، نه A، بلکه B بوده است.



شکل ۴۴



شکل ۴۵

B در روزهای شنبه، سه‌شنبه و پنجشنبه دروغ می‌گوید، پس روز گفت و شنود، یکی از این سه روز بوده است.

اکنون به پاسخ‌های نفر دوم توجه کنیم (و اکنون می‌دانیم، او همان A است). او گفت: «فردا جمعه است». آیا باید، این حرف او را باور کرد؟ او به دنبال حرف خود اضافه کرده است: «من همیشه چهارشنبه‌ها راست می‌گویم». ولی با توجه به شرط مساله می‌دانیم، A در روزهای دوشنبه، سه‌شنبه و چهارشنبه، دروغ می‌گوید. بنابراین، هر دو پاسخ A دروغ است. با توجه به این‌که A دروغ گفته است، باید گفت و شنود، در یکی از روزهای دوشنبه، سه‌شنبه یا چهارشنبه انجام گرفته باشد. با مقایسهٔ این نتیجه با نتیجه‌ای که پیش از این گرفتیم (که باید به دلیل دروغ گفتن B، گفت و شنود، در یکی از روزهای شنبه، سه‌شنبه یا پنجشنبه انجام گرفته باشد)، تنها یک حالت ممکن باقی می‌ماند: گفت و شنود روز سه‌شنبه انجام گرفته است.

پاسخ. گفت و شنود در روز سه‌شنبه بوده است. نخستین کسی که بین دو نفر مرد عجیب، پاسخ داده است B و نفر دوم A است.

۴. عدد کوچکتر را $۲a$، فرض می‌کنیم. اگر نصف آن را از خودش کم کنیم، تفاضل برابر a و، بنابراین، باقی‌ماندهٔ a از عدد بزرگتر (بنابر شرط مساله) برابر $۳a$ و خود عدد بزرگتر برابر $۴a$ می‌شود.

پاسخ. عدد بزرگتر، دو برابر عدد کوچکتر است.

۵. وقتی $x-a$ $(a \in \mathbf{N}, x \in \mathbf{N})$ بر a بخش‌پذیر باشد، به معنای آن است که x بر a بخش‌پذیر است. بنابراین، عدد سه‌رقمی ما، باید بر ۷، ۸ و ۹ بخش‌پذیر باشد. عددهای ۷، ۸ و ۹ نسبت به هم اول‌اند، پس عدد سه‌رقمی بر حاصل‌ضرب آن‌ها

$$۷ \times ۸ \times ۹ = ۵۰۴$$

بخش‌پذیر است. عدد سه رقمی نمی‌تواند عامل دیگری داشته باشد، زیرا اگر ۵۰۴ را در کوچکترین عدد طبیعی غیر واحد، یعنی ۲ ضرب کنیم، عدد چهار رقمی می‌شود.

پاسخ. ۵۰۴.

۶. بنابر شرط مساله، باید عددی که فاصلهٔ بین دو شهر را، بر حسب کیلومتر، مشخص می‌کند، برابر باشد با تعداد دقیقه‌هایی که اتومبیل در راه بوده است. بنابراین، به طور متوسط، در هر دقیقه، یک کیلومتر پیموده است.

پاسخ. ۶۰ کیلومتر در ساعت.

۷. چند پاسخ را در این‌جا آورده‌ایم:

$$۹۷۵۲۴ : ۱۰۸۳۶ = ۹,$$

$$۹۵۸۲۳ : ۱۰۶۴۷ = ۹,$$

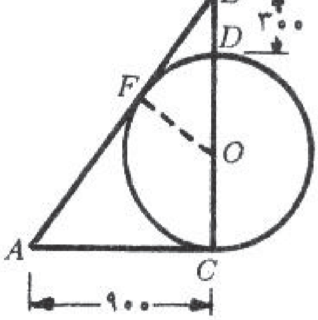
$$۹۵۷۴۲ : ۱۰۶۳۸ = ۹,$$

$$۰ \times ۱۲۳۴۵۶۷۸ + ۹ = ۹,$$

$$۱^{۲۳۴۵۶۷۹۰} + ۸ = ۹$$

آیا می‌توانید پاسخ‌های دیگری پیدا کنید؟

۸. وقتی از دروازهٔ C، به سوی غرب حرکت می‌کنیم، برای نخستین بار، در نقطه A، درخت را می‌بینیم، به نحوی که، اگر درخت را B بنامیم،



شکل ۴۶

پاره‌خط راست AB، در نقطه‌ای مثل F بر دایره (حصار شهر) مماس باشد.

برای ساده‌تر کردن محاسبه‌ها، هر ۳۰۰ گام را یک واحد فرض می‌کنیم، به این ترتیب (شکل ۴۶):

$$|BD| = ۱, |AC| = ۳$$

شعاع دایره را برابر x و طول پاره‌خط راست BF را برابر y می‌گیریم. درضمن، $|AF| = ۳$ (از نقطهٔ A، دو مماس AC و AF بر دایرهٔ به مرکز O رسم شده‌اند، بنابراین، طول پاره‌خط‌های راست دو مماس، با هم برابرند).

در مثلث قائم‌الزاویه OBF (که در راس F، قائمه است)، داریم:

$$|OB|^۲ - |OF|^۲ = |BF|^۲ \Rightarrow (x + ۱)^۲ - x^۲ = y^۲$$

از این‌جا، به دست می‌آید: $y^۲ = ۲x + ۱$.

مثلث ABC هم، در راس C، قائمه است، بنابراین

$$|BC|^۲ + |AC|^۲ = |AB|^۲ \Rightarrow (۲x + ۱)^۲ + ۹ = (y + ۳)^۲$$

و اگر در آن، به‌جای $۲x + ۱$، برابرش $y^۲$ را قرار دهیم، با توجه به این‌که، مقدار y مخالف صفر است، به این معادله می‌رسیم:

$$y^۳ - y - ۶ = ۰$$

که می‌توان سه‌جمله‌ای سمت چپ آن را، به این ترتیب، تجزیه کرد:

$$y^{۳} - y - ۶ = (y^{۳} - ۴y) + (۳y - ۶) =$$
$$= y(y + ۲)(y - ۲) + ۳(y - ۲) =$$
$$= (y - ۲)(y + ۲y + ۳)$$

سه‌جمله‌ای $۳ + ۲y + y^{۲}$، ریشهٔ حقیقی ندارد (چرا؟)، بنابراین، از معادلهٔ

$$y^{۳} - y - ۶ = ۰$$

تنها یک جواب به‌دست می‌آید: $y = ۲$. اکنون، با توجه به برابری

$$۲x + ۱ = y^{۲}$$

به دست می‌آید: $۲x = ۳$. $۲x$، قطر دایره و معرف فاصلهٔ بین دو دروازه است.

پاسخ. فاصلهٔ بین دو دروازهٔ شمالی و جنوبی، برابر ۹۰۰ گام است.

۹. برخلاف آن چه تصور می‌کنید، راز این جدول عددی را، می‌توان خیلی ساده آشکار کرد.

	۱۲	۱	۴	۱۸	۰
۷	۱۹	۸	۱۱	۲۵	۷
۰	۱۲	۱	۴	۱۸	۰
۴	۱۶	۵	۸	۲۲	۴
۹	۲۱	۱۰	۱۳	۴۷	۹
۲	۱۴	۳	۶	۲۰	۲

شکل ۴۷

تمامی راز جدول، مربوط به دو دنبالهٔ محدود عددی است:

۱۲, ۱, ۴, ۱۸, ۰
۷, ۰, ۴, ۹, ۲

که مجموع عددهای دو دنباله، روی هم، برابر است با ۵۷.

مربعی شامل ۵×۵ خانه رسم می‌کنیم، عددهای دنبالهٔ اول را، از چپ به راست، در بالای مربع و روی خانه‌های افقی قرار می‌دهیم؛ به همین ترتیب، پنج عدد دنبالهٔ دوم را، به طور ستونی، در سمت چپ جدول و از بالا به پایین می‌نویسیم (شکل ۴۷).

اکنون نخستین عدد دنبالهٔ دوم (یعنی ۷) را با هریک از عددهای دنبالهٔ اول جمع کنید و در خانه‌های سطر اول بنویسید؛ سپس دومین عدد دنبالهٔ دوم (۰) را با عددهای دنبالهٔ اول جمع کنید و در سطر دوم جدول بنویسید و غیره (می‌توانستیم، عددهای دنبالهٔ اول را، به ترتیب بر عددهای دنبالهٔ دوم بیفزاییم و، از چپ به راست، در ستون‌های جدول قرار دهیم).

به این ترتیب، هر عدد واقع در جدول، مجموع دو عدد از دو دنبالهٔ ماست. وقتی سکه‌ای روی عددی قرار می‌دهید، مثل این است که، مجموع یک جمله از دنبالهٔ اول با یک جمله از دنبالهٔ دوم را کنار گذاشته‌اید. همهٔ راز مساله در این‌جاست که، هربار، سکه، روی عددی غیر از عددهای قبلی قرار می‌گیرد، زیرا سطر و ستون عددهای قبلی را پوشانده‌ایم. به همین مناسبت، مجموع عددهای واقع در زیر پنج سکه، برابر با مجموع عددهای دو دنباله می‌شود.

با آگاهی از راز جدول، می‌توان مربع‌های تازه‌ای با همین ویژگی درست کرد. جدول مربعی را با هر چند خانه در نظر بگیریم و عددهای نخستین را، به هر گونه‌ای انتخاب کنیم، اثری در ویژگی جدول نخواهد داشت.

۱۰. عدد را $\overline{ab}$ می‌گیریم. به ترتیب به دست می‌آید:

$$\begin{cases} a+b=۸ \\ \overline{ba}-\overline{ab}=۱۸ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=۸ \\ (۱۰b+a)-(۱۰a+b)=۱۸ \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=۸ \\ ۹(b-a)=۱۸ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=۸ \\ b-a=۲ \end{cases} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} a=۳ \\ b=۵ \end{array} \right.$$

پاسخ. ۳۵.

۱۱. اگر از محلول اولی x لیتر انتخاب کرده باشیم، باید از محلول دوم به اندازهٔ $(۱۰۰ - x)$ لیتر برداریم. x لیتر محلول اول، $۰/۳x$ لیتر اسید ازتیک خالص، و $(۱۰۰ - x)$ لیتر محلول دوم به اندازهٔ $۰/۵۵(۱۰۰ - x)$ لیتر اسید ازتیک خالص دارد.

در محلول مخلوط، باید $۰/۵ \times ۱۰۰$، یعنی ۵۰ لیتر اسید ازتیک خالص داشته باشیم، بنابراین

$$۰/۳x + ۰/۵۵(۱۰۰ - x) = ۵۰ \Rightarrow x = ۲۰$$

پاسخ. از محلول اول ۲۰ لیتر و از محلول دوم ۸۰ لیتر.

۱۲. کارگر اول، هر ساعت $\frac{۱}{m}$ کار و کارگر دوم، هر ساعت $\frac{۱}{n}$ کار را انجام می‌دهد. بنابراین، اگر دو کارگر با هم کار کنند، در یک ساعت، کسری از کار را انجام می‌دهند که برابر

$$\frac{۱}{m} + \frac{۱}{n} = \frac{m+n}{mn}$$

تمام کار است. این تناسب به دست می‌آید:

$$\begin{matrix} \text{ساعت} & & \\ ۱ & \frac{m+n}{mn} & \Rightarrow ? = ۱ : \frac{m+n}{mn} = \frac{mn}{m+n} \\ ? & ۱ & \end{matrix}$$

۱۳. فرض می‌کنیم برنامهٔ کارخانهٔ اول ساختن x قطعه و برنامهٔ کارخانهٔ دوم ساختن $x - ۳۶۰$ قطعه در ماه باشد. بنابراین، کارخانهٔ اول $۱/۱۲x$ قطعه و کارخانهٔ دوم، $۱/۱(۳۶۰ - x)$ قطعه تولید کرده است، یعنی

$$۱/۱۲x + ۱/۱(۳۶۰ - x) = ۴۰۰ \Rightarrow x = ۲۰۰$$

چون کارخانهٔ اول $\circ/۱۲x$ قطعه بیش از برنامه تولید کرده است، تعداد قطعه‌های تولیدی او، بیش از برنامه، چنین است:

$$\circ/۱۲ \times ۲\circ\circ = ۲۴$$

پاسخ. کارخانهٔ اول ۲۴ قطعه و کارخانهٔ دوم ۱۶ قطعه، افزون بر برنامهٔ خود، تولید کرده‌اند.

۱۴. به‌ترتیب داریم:

$$\sqrt{۲۸} = ۲\sqrt{۷}, \sqrt{۱/۷۵} = \sqrt{\frac{۱۷۵}{۱\circ\circ}} = \sqrt{\frac{۷}{۴}} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۷},$$

$$۵\sqrt{\frac{۱}{۸}} = \frac{۵}{۲\sqrt{۲}} = \frac{۵}{۴}\sqrt{۲}, ۶\sqrt{۱۲/۵} = \frac{۳\circ}{\sqrt{۲}} = ۱۵\sqrt{۲}$$

بنابراین

$$۱)\ A = ۲\sqrt{۷} - \frac{۱}{۲}\sqrt{۷} + \frac{۵}{۴}\sqrt{۲} + ۱۵\sqrt{۲} = \frac{۳}{۲}\sqrt{۷} + \frac{۶۵}{۴}\sqrt{۲};$$

به همین ترتیب

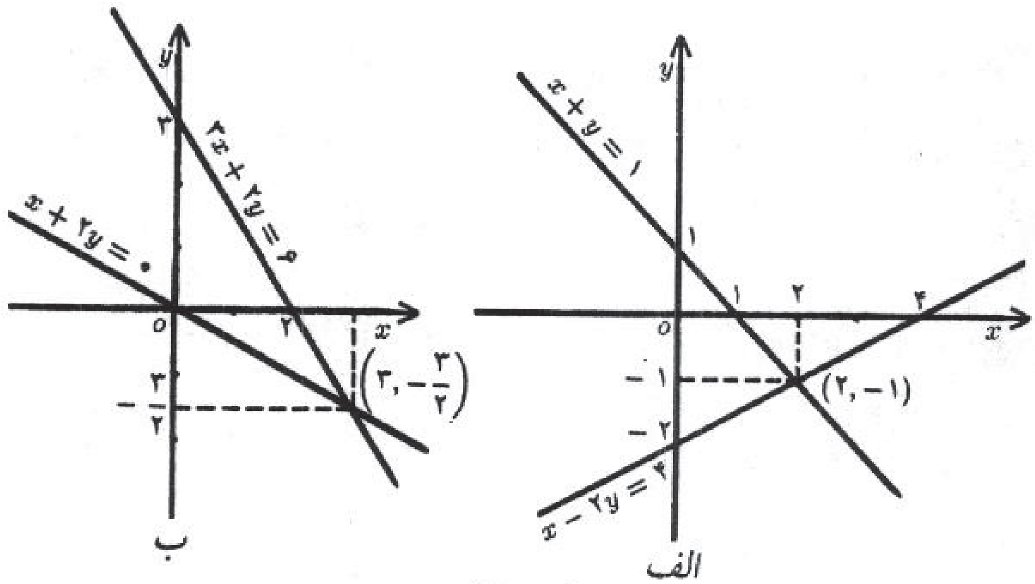
$$\circ/۵\sqrt{۱\circ\circ\circ} = ۵\sqrt{۱\circ}, \sqrt{\circ/۱۲} = \sqrt{\frac{۳}{۲۵}} = \frac{۱}{۵}\sqrt{۳},$$

$$\circ/۴\sqrt{۶/۷۵} = \circ/۴\sqrt{\frac{۶۷۵}{۱\circ\circ}} = \circ/۴\sqrt{۹ \times \frac{۳}{۱\circ}} = ۱/۲\sqrt{\circ/۳},$$

$$\circ/۵\sqrt{۴\circ} = \sqrt{۱\circ}, ۴۵\sqrt{\frac{۱}{۲۷}} = \frac{۴۵}{۳}\sqrt{\frac{۱}{۳}} = ۵\sqrt{۳}$$

در نتیجه

$$۲)\ B = ۵\sqrt{۱\circ} - \frac{۱}{۵}\sqrt{۳} + ۱/۲\sqrt{\circ/۳} - \sqrt{۱\circ} - ۵\sqrt{۳} =$$



شکل ۴۸

$$= ۴\sqrt{۱۰} - \frac{۲۶}{۵}\sqrt{۳} + ۱/۲\sqrt{۰/۳}$$

۱۵. پاسخ‌ها را در شکل ۴۸ الف و ب ببینید. در هر دو حالت، نمودارها، خط‌های راست‌اند. در شکل ۴۸، مختصات نقطه‌های برخورد، مشخص شده است.

۱۶. باید دستگاهی شامل دو معادله تشکیل دهیم و آن را حل کنیم:

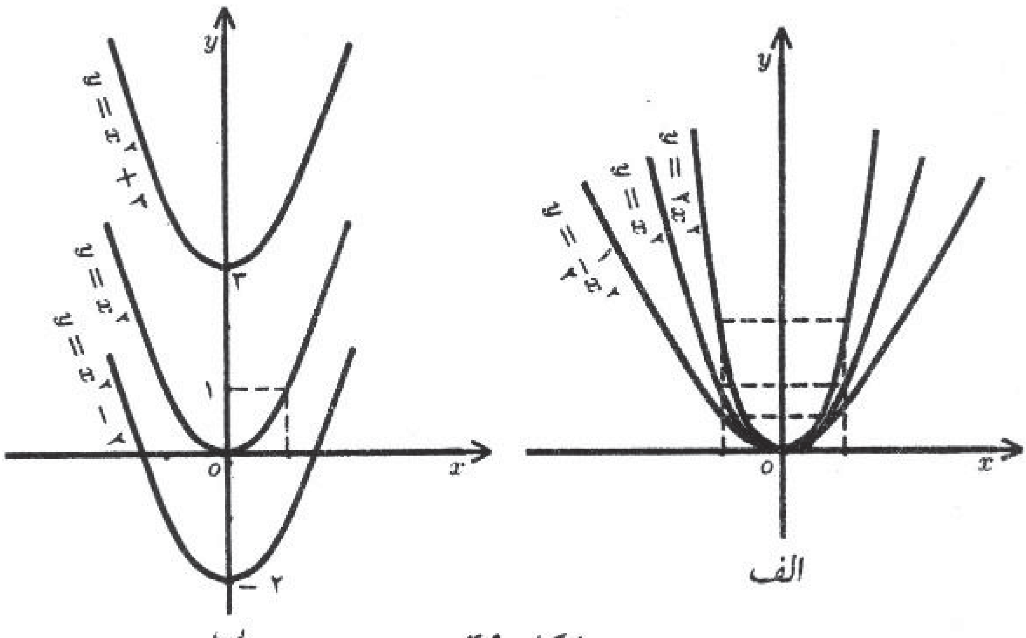
$$۱)\ \begin{cases} y = \frac{۱۲}{x} \\ y = ۳x \end{cases} \Rightarrow \frac{۱۲}{x} = ۳x \Rightarrow x = \pm ۲$$

پاسخ. $(۲, ۶)$ و $(-۲, -۶)$.

$$۲)\ \begin{cases} y = \frac{۱۸}{x} \\ ۴x + y = ۶ \end{cases} \Rightarrow \frac{۱۸}{x} = ۶ - ۴x \Rightarrow ۲x^۲ - ۳x + ۹ = ۰$$

این معادلهٔ درجه دوم، ریشه‌های حقیقی ندارد.

پاسخ. نمودارها، یکدیگر را قطع نمی‌کنند.



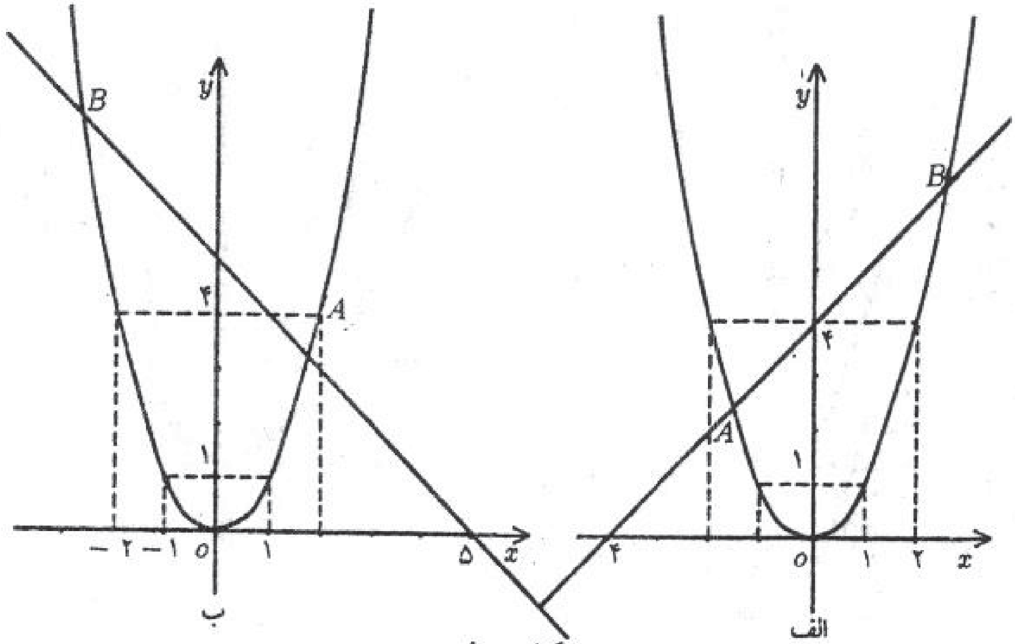
شکل ۴۹

۱۷. ۱) هر سه نمودار از مبداء مختصات می‌گذرند و در آن‌جا به پایین‌ترین نقطهٔ خود می‌رسند (مبداء مختصات، نقطهٔ می‌نیمم در هریک از آن‌هاست).

وقتی ضریب $x^۲$، از لحاظ قدر مطلق بزرگ شود، به معنای آن است که، به‌ازای مقدار معینی از x، مقدار y بزرگ و، درنتیجه، شاخه‌های نمودار به محور $y'y$ نزدیک می‌شود.

به این ترتیب، شکل کلی سه نمودار یکی است (همهٔ آن‌ها سهمی هستند)، ولی شاخه‌های نمودار $y = \frac{۱}{۲}x^۲$، نسبت به بقیه، از محور $y'y$ دورتر و شاخه‌های نمودار $y = ۲x^۲$، نسبت به بقیه، به محور $y'y$ نزدیکتر است. برای درک بهتر مطلب، نمودارها را روی یک شکل (شکل ۴۹_الف) داده‌ایم.

۲) دو نمودار، نسبت به محور $x'x$، قرینهٔ یکدیگرند. $y = x^۲$ در مبداء مختصات به پایین‌ترین نقطهٔ خود و $y = -x^۲$ در مبداء مختصات به بالاترین نقطهٔ خود می‌رسد.



شکل ۵۰

۳) اگر از نقطهٔ $(\circ, ۳)$، نموداری موازی شاخه‌های نمودار $y = x^۲$ رسم کنیم، نمودار $y = x^۲ + ۳$ به دست می‌آید. به همین ترتیب، برای رسم نمودار $y = x^۲ - ۲$، باید از نقطهٔ $(\circ, -۲)$ موازی با شاخه‌های نمودار $y = x^۲$ رسم کرد (شکل ۴۹ـب).

۱۸. ۱) این دستگاه را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} y = x^۲ \\ y = x + ۴ \end{cases} \Rightarrow x^۲ - x - ۴ = \circ$$

می‌بینیم، برای حل دستگاه، باید معادلهٔ درجه دوم

$$x^۲ - x - ۴ = \circ$$

را حل کرد. بنابراین ریشه‌های این معادله، عبارتند از طول‌های نقطه‌های برخورد دو نمودار $y = x^۲$ و $y = x + ۴$.

در شکل ۵۰ـالف می‌بینیم، دو نمودار در نقطه‌های A و B یکدیگر را قطع کرده‌اند. طول‌های نقطه‌های A و B، همان ریشه‌های معادلهٔ مفروض‌اند.

روی شکل دیده می‌شود که طول نقطهٔ A، عددی است بین ۲− و ۱−:

$$-۲ < x_۱ < -۱ \Rightarrow x_۱ = -۱/\ldots$$

به‌ازای $x = -\frac{۳}{۲}$، مقدار y برای $y = x^۲$ برابر $\frac{۹}{۴}$ و برای $y = x + ۴$ برابر $\frac{۵}{۲}$ می‌شود. چون $\frac{۵}{۲} > \frac{۹}{۴}$، پس طول نقطهٔ A از $-\frac{۳}{۲}$ کمتر است. ولی به‌ازای $x = -۱/۶$، برای $y = x^۲$ عدد ۲/۵۶ و برای $y = x + ۴$، عدد ۲/۴ به دست می‌آید، یعنی طول نقطهٔ A از ۱/۶− بیشتر است. به این ترتیب، اگر طول نقطهٔ A را $x_۱$ بنامیم:

$$-۱/۶ < x_۱ < -۱/۵ \Rightarrow x_۱ \approx -۱/۵$$

به همین ترتیب می‌توان طول نقطهٔ B را تا یک رقم بعد از ممیز پیدا کرد:

$$x_۲ \approx ۲/۵$$

۲) پاسخ. (شکل ۵۰ـب). $x_۱ \approx -۲/۸$ و $x_۲ \approx ۱/۸$.

یادداشت. در مسالهٔ (۱۸ـ۲)، $x_۱$ اندکی از ۲/۸− بزرگتر است، ولی چون به ۲/۸− نزدیکتر است تا به ۲/۷−، مقدار تقریبی آن را برابر ۲/۸− نوشتیم. همچنین، مقدار $x_۲$ اندکی از ۱/۸ کمتر است، ولی روشن می‌شود که به ۱/۸، نسبت به ۱/۷ نزدیکتر است. محاسبه‌ها را خودتان انجام دهید تا در این باره قانع شوید.

۱۹. فرض می‌کنیم، هر بار، قیمت پارچه x٪ ارزان شده باشد. بار اول، قیمت یک متر پارچه بعد از ارزان شدن، برابر

$$۱۶۰۰ - \frac{۱۶۰۰x}{۱۰۰} = ۱۶۰۰\left(۱ - \frac{x}{۱۰۰}\right)$$

ریال می‌شود. دوباره x٪ از قیمت پارچه کم شده است، بنابراین قیمت یک متر پارچه، چنین می‌شود (برحسب ریال):

$$۱۶۰۰\left(۱-\frac{x}{۱۰۰}\right)-\frac{۱۶۰۰(۱-\frac{x}{۱۰۰})x}{۱۰۰}=$$
$$=۱۶۰۰\left(۱-\frac{x}{۱۰۰}\right)\left(۱-\frac{x}{۱۰۰}\right)=۱۶۰۰\left(۱-\frac{x}{۱۰۰}\right)^۲$$

و این مقدار، بنا بر فرض، باید برابر ۹۰۰ ریال باشد:

$$۱۶۰۰\left(۱-\frac{x}{۱۰۰}\right)^۲=۹۰۰\Rightarrow ۱۶\left(۱-\frac{x}{۱۰۰}\right)^۲=۹$$

و اگر از دو طرف برابری اخیر جذر بگیریم:

$$۴\left(۱-\frac{x}{۱۰۰}\right)=۳$$

سمت چپ برابری مثبت است (زیرا x درصد، از صد درصد، یعنی $\frac{x}{۱۰۰}$ از واحد کوچکتر است)، به همین دلیل سمت راست برابری را هم مثبت گرفته‌ایم.

از این معادلهٔ خطی، به سادگی به دست می‌آید: $x=۲۵$.

پاسخ. هر بار قیمت پارچه ۲۵٪ تنزل پیدا کرده است.

۲۰. شعاع دایرهٔ بزرگتر را R و شعاع دایرهٔ کوچکتر را r می‌نامیم. بنا به فرض، باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} R+r=۱۴ \\ \pi R^۲+\pi r^۲=۱۳۰\pi \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} R+r=۱۴ \\ R^۲+r^۲=۱۳۰ \end{cases}$$

اگر $R^۲+r^۲$ را به صورت $(R+r)^۲-۲Rr$ بنویسیم، مقدار $۲Rr=۶۶$ به دست می‌آیند. بنابراین

$$R^۲+r^۲-۲Rs=۶۴ \Rightarrow (R-r)^۲=۶۴$$

از آن‌جا $R-r=۸$ (چون $R>r$، پس $R-r>۰$). به این ترتیب، به دستگاه سادهٔ زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} R+r=۱۴ \\ R-r=۸ \end{cases} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} R=۱۱ \\ r=۳ \end{array} \right.$$

۲۱. سرعت قایق موتوری را در آغاز v کیلومتر در ساعت می‌گیریم. در نتیجه، با توجه به فرض مساله، باید داشته باشیم:

$$\frac{۳۶}{v-۳}+\frac{۳۶}{v+۳}=۵ \Rightarrow ۵v^۲-۷۲v-۴۵=۰$$

از آن‌جا به دست می‌آید: $v=۱۵$ (ریشهٔ منفی معادله، پذیرفتنی نیست).

از طرف دیگر، اگر قایق تمام مسیر را با سرعت ساعتی ۱۵ کیلومتر در ساعت می‌پیمود، به اندازهٔ $\frac{۷۲}{۱۵}$ ساعت، یعنی ۴ ساعت و ۴۸ دقیقه در راه بود. به این ترتیب، با ۱۲ دقیقه تاخیر به مقصد رسیده است.

۲۲. جهانگرد $\frac{۶۲/۵}{۱۰۰}\times ۱۶۰$، یعنی ۱۰۰ کیلومتر را با اتومبیل و ۶۰ کیلومتر را با قایق رفته است. اگر سرعت اتومبیل را v بگیریم، سرعت قایق $(v-۲۰)$ کیلومتر در ساعت می‌شود و باید داشته باشیم:

$$\frac{۱۰۰}{v}-\frac{۶۰}{v-۲۰}=\frac{۱۵}{۶۰}=\frac{۱}{۴} \Rightarrow v^۲-۱۸۰v-۸۰۰۰=۰$$

برای v، دو جواب به دست می‌آید: ۱۰۰ و ۸۰.

پاسخ. سرعت اتومبیل ۱۰۰ کیلومتر در ساعت و سرعت قایق ۸۰ کیلومتر در ساعت؛ یا سرعت اتومبیل ۸۰ کیلومتر در ساعت و سرعت قایق ۶۰ کیلومتر در ساعت.

۲۳. سرعت اتومبیل را در نیمهٔ نخست راه، v کیلومتر در ساعت می‌گیریم. اگر طول مسیر را $۲a$ کیلومتر و ۴۵ دقیقه را $\frac{۳}{۴}$ ساعت در نظر بگیریم، باید داشته باشیم:

$$\frac{a}{v} = ۱, \frac{a}{v + ۱۵} = \frac{۳}{۴}$$

از تقسیم این دو معادله بر یکدیگر به دست می‌آید:

$$\frac{v + ۱۵}{v} = \frac{۴}{۳} \Rightarrow v = ۴۵$$

۲۴. ۱) *پاسخ*. $x = \frac{a + b}{a^۲ + b^۲}$، $y = \frac{a^۳ - b^۳}{ab(a^۲ + b^۲)}$.

۲) با توجه به معادلهٔ $x - y = ۱$، معادلهٔ اول دستگاه، به این صورت درمی‌آید:

$$(x - y)^۲ + ۲xy = ۵ \Rightarrow ۲xy = ۴$$

و اگر معادلهٔ $۲xy = ۴$ را با معادلهٔ $x^۲ + y^۲ = ۵$ جمع کنیم:

$$(x + y)^۲ = ۹ \Rightarrow x + y = \pm ۳$$

بنابراین، باید دو دستگاه زیر را حل کرد:

$$\begin{cases} x + y = ۳ \\ x - y = ۱ \end{cases}, \begin{cases} x + y = -۳ \\ x - y = ۱ \end{cases}$$

پاسخ. $x = ۲$، $y = ۱$ یا $x = -۱$، $y = -۲$.

۳) معادلهٔ اول دستگاه، به این صورت قابل تبدیل است:

$$(x+y)(x^{۲}-xy+y^{۲})=۲۶$$

که اگر در آن، $x+y=۲$ را قرار دهیم، به دست می‌آید:

$$x^{۲}-xy+y^{۲}=۱۳ \qquad (۱)$$

و اگر در معادلهٔ (۱)، $x^{۲}+y^{۲}$ را به $(x+y)^{۲}-۲xy$ تبدیل کنیم، با در دست داشتن مقدار $x+y$، مقدار xy به دست می‌آید:

$$xy=-۳ \qquad (۲)$$

معادلهٔ (۲) را از معادلهٔ (۱) کم می‌کنیم:

$$(x-y)^{۲}=۱۶ \Rightarrow x-y=\pm ۴$$

و به دو دستگاه زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} x+y=۲ \\ x-y=۴ \end{cases},\begin{cases} x+y=۲ \\ x-y=-۴ \end{cases}$$

پاسخ. $x=۳$، $y=-۱$ یا $x=-۱$، $y=۳$.

۲۵. الف) این پنج نفر را نام‌گذاری می‌کنیم:

$$۱,\ ۲,\ ۳,\ ۴,\ ۵$$

۱ را می‌توان با هریک از دیگران در نظر گرفت:

$$\{۱,۲\};\{۱,۳\};\{۱,۴\};\{۱,۵\} \quad \text{(۴ انتخاب)}$$

تا این‌جا، ۴ گروه دونفری، با شرکت ۱، به دست می‌آید. اکنون به ۲ می‌پردازیم. شرکت او را با ۱، پیش از این به حساب آورده‌ایم؛ باید او را با هریک از افراد ۳، ۴ و ۵ هم در نظر بگیریم:

$$\{۲,۳\};\{۲,۴\};\{۲,۵\} \quad \text{(۳ انتخاب)}$$

و برای ۳:

$$\{۳,۴\};\{۳,۵\} \quad \text{(۲ انتخاب)}$$

و یک انتخاب دیگر، برای ۴:

$$\{۴,۵\} \quad \text{(۱ انتخاب)}$$

روی هم به تعداد (۱ + ۲ + ۳ + ۴) انتخاب می‌رسیم؛ یعنی از بین ۵ نفر، به ۱۰ طریق می‌توان یک گروه ۲ نفری انتخاب کرد.

یادداشت. با اندکی دقت و با استدلالی مشابه، می‌توان نتیجه گرفت: از بین n نفر، برای انتخاب یک گروه ۲ نفری، به تعداد

$$(n-۱)+(n-۲)+\ldots+۲+۱ \qquad (*)$$

طریق انتخاب وجود دارد. برای محاسبهٔ مجموع $(*)$، اگر آن را، یکبار دیگر، از راست به چپ بنویسیم:

$$۱+۲+\ldots+(n-۲)+(n-۱) \qquad (**)$$

و دو مجموع $(*)$ و $(**)$ را با هم جمع کنیم، به دست می‌آید:

$$\underbrace{n+n+\ldots+n+n}_{\text{مرتبه } (n-۱)}=n(n-۱)$$

و این مقدار، دو برابر مجموع (*) است. پس

$$(n-۱)+(n-۲)+\ldots+۲+۱=\frac{۱}{۲}n(n-۱)$$

یعنی از بین n نفر، به $\frac{۱}{۲}n(n-۱)$ طریق، می‌توان ۲ نفر را انتخاب کرد. اکنون، اگر $n=۵$ بگیریم، به همان عدد ۱۰ می‌رسیم که، برای مسالهٔ خود، پیدا کرده بودیم.

ب) این مساله را، با روش دیگری حل می‌کنیم. فرض می‌کنیم، ۶ نقطه روی یک صفحه داشته باشیم، به نحوی که، هیچ سه نقطه‌ای، روی یک خط راست نباشند. مسالهٔ ما، به این معناست که، با این ۶ نقطه، چند مثلث می‌توان ساخت، طوری که راس‌های هریک، روی سه نقطه از این شش نقطه باشند (روش استفاده از گراف).

ببینیم، اگر یکی از نقطه‌ها را (در بین این ۶ نقطه) در نظر بگیریم، چند مثلث می‌توان پیدا کرد، به نحوی که، این نقطه، یکی از راس‌های آن باشد؟

به‌جز این نقطهٔ انتخابی، ۵ نقطهٔ دیگر باقی می‌ماند که، از بین آن‌ها، به ۱۰ طریق می‌توان ۲ نقطه انتخاب کرد (مسالهٔ ۲۵، الف)؛ یعنی ۱۰ مثلث وجود دارد، به نحوی که، یک راسِ هر کدام از آن‌ها، در نقطهٔ انتخابی است. اکنون، اگر هر ۶ نقطه را در نظر بگیریم، روی هم، به ۱۰×۶، یعنی ۶۰ مثلث می‌رسیم. ولی، هر مثلث ۳ راس دارد و ما، در اینجا، هر مثلث را سه بار (هر بار به خاطر یکی از راس‌های آن) به حساب آورده‌ایم. بنابراین، تعداد واقعی مثلث‌ها، برابر است با $۶۰\times\frac{۱}{۳}$، یعنی ۲۰.

با ۶ نقطهٔ واقع بر صفحه، که هیچ ۳ نقطه‌ای بر یک خط راست نباشند، می‌توان ۲۰ مثلث متمایز ساخت و یا از بین ۶ نفر، به ۲۰ طریق، می‌توان ۳ نفر را، برای انجام یک کار، انتخاب کرد.

۲۶. در جلد دوم «ریاضیات محاسبه‌ای» (مساله ۲۸ صفحه ۱۶)، همین

مساله آمده بود، ولی در آن‌جا، ثابت کردیم، دست کم یک گروه سه نفری از بین شش نفر پیدا می‌شود که یا هر سه نفر دو به دو با هم آشنا هستند و یا در بین آن‌ها، هیچ دو نفری یکدیگر را نمی‌شناسند.

اکنون، مساله به صورت عام‌تر مطرح شده است. باید ثابت کنیم در بین شش نفر، دست کم، دو گروه سه نفری وجود دارد، به نحوی که در هر گروه، یا همه یکدیگر را می‌شناسند و یا همه با یکدیگر ناآشنا هستند. البته، این دو گروه سه نفری، می‌توانند یک یا دو عضو مشترک داشته باشند.

در پایان مسالهٔ ۲۸ از جلد دوم «ریاضیات محاسبه‌ای» (بخش حل مساله‌ها)، از روش «گراف» صحبت کردیم؛ هر یک از شش نفر را با یک نقطه، رابطهٔ آشنایی دو نفر را با پاره‌خط راست پیوسته و رابطهٔ ناآشنایی را با پاره‌خط راست نقطه‌چین نشان دادیم. برای حل مسالهٔ حاضر هم، همین روش را به کار می‌بریم. در آغاز ببینیم، با شش نفر چند گروه سه نفری می‌توان تشکیل داد؟

این مساله را، در مسالهٔ ۲۵، ب حل کردیم و نتیجه گرفتیم: از بین شش نفر، به ۲۰ طریق می‌توان یک گروه سه نفری انتخاب کرد. در این‌جا، با روش دیگری (روش مستقیم محاسبه)، همین نتیجه را می‌گیریم.

اگر هر شخص را با یک نقطه نشان دهیم، باید ببینیم، با شش نقطه، چند مثلث می‌توان ساخت که راس‌های هر مثلث، سه نقطه از این شش نقطه باشد! نقطه‌ها را، با عددهای

۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶

نشان می‌دهیم. مساله این است که، اگر مجموعه‌ای دارای شش عضو ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ باشد، چند زیرمجموعهٔ سه عضوی دارد! در این‌جا، برای سادگی کار، وقتی می‌نویسیم، ۱۴۵، منظورمان زیرمجموعه‌ای شامل عضوهای ۱، ۴ و ۵ است. همچنین ۱۲ به معنای زیر مجموعه‌ای شامل دو

عضو ۱ و ۲ است.

اول زیرمجموعهٔ {۲ ,۱}، یعنی ۱۲ را در نظر می‌گیریم و روشن می‌کنیم، چند زیرمجموعهٔ سه عضوی وجود دارد که دو عضو آن عددهای ۱ و ۲ باشند:

۱۲ : ۱۲۳, ۱۲۴, ۱۲۵, ۱۲۶ (۴)

عدد ۴، که در داخل پرانتز نوشته شده است، مُعرف تعداد زیرمجموعه‌های سه عضوی است که با ۱۲ آغاز شده‌اند. اکنون، به زیرمجموعه‌های سه عضوی که با ۱۳ آغاز شده‌اند، سپس آن‌ها که با ۱۴، ۱۵ و ۱۶ آغاز شده‌اند، می‌پردازیم:

۱۳ : ۱۳۴, ۱۳۵, ۱۳۶ (۳)
۱۴ : ۱۴۵, ۱۴۶ (۲)
۱۵ : ۱۵۶ (۱)

با ۱۶، عدد سه‌رقمی تازه‌ای نمی‌توان ساخت.

اکنون، همین روش را دربارهٔ عددهای ۲۳، ۲۴ و ۲۵، بعد دربارهٔ عددهای ۳۴ و ۳۵ و سرانجام دربارهٔ عدد ۴۵ به کار می‌بریم:

۲۳ : ۲۳۴, ۲۳۵, ۲۳۶ (۳)
۲۴ : ۲۴۵, ۲۴۶, (۲)
۲۵ : ۲۵۶, (۱)
۳۴ : ۳۴۵, ۳۴۶ (۲)
۳۵ : ۳۵۶ (۱)
۴۵ : ۴۵۶ (۱)

اگر عددهای سمت راست را در داخل پرانتزها، با هم جمع کنیم، به عدد ۲۰ می‌رسیم، یعنی یک مجموعهٔ شش عضوی، *دارای ۲۰ زیرمجموعهٔ سه عضوی است*؛ یا: *با ۶ نقطهٔ واقع بر صفحه، می‌توان ۲۰ مثلث مختلف ساخت که راس‌های آن‌ها، در بین این شش نقطه باشند*. به زبان دیگر: *با شش نفر، می‌توان ۲۰ گروه سه نفریِ مختلف درست کرد*.

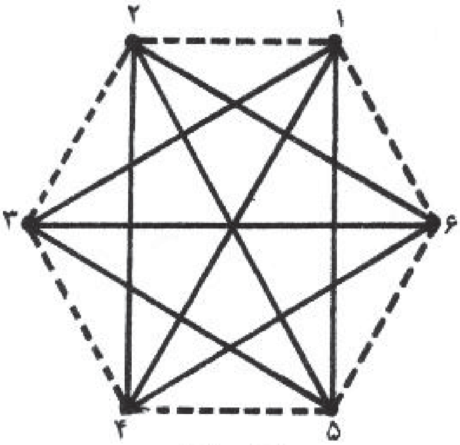
با توجه به مسالهٔ ما، اگر این شش نفر، دو به دو با هم آشنا باشند، می‌توان ۲۰ گروه سه نفری تشکیل داد، به نحوی که در هر گروه، همه یکدیگر را بشناسند. به همین ترتیب، اگر همهٔ شش نفر، دو به دو با هم ناآشنا باشند، می‌توان ۲۰ گروه سه نفری تشخیص داد که، در هر کدام از آن‌ها، کسی دو نفر دیگر را نشناسد.

ولی مسالهٔ ما، کمترین تعداد این گروه‌های سه نفری را می‌خواهد و می‌گوید، در هر حالتی، حداقل دو گروه سه نفری پیدا می‌شود، به نحوی که در هر گروه، یا دو به دو با هم آشنا هستند و یا دو به دو با هم نا آشنا.

به سراغ گراف می‌رویم: هر فرد را با یک نقطه، رابطهٔ آشنایی را با پاره‌خط راست سبز رنگی که دو نقطه را به هم پیوسته است و رابطهٔ نا آشنایی را با پاره‌خط راست قرمز نشان می‌دهیم (روی شکل‌هایی که آورده‌ایم، پاره‌خط‌های راست سبز را با خط پیوسته و پاره‌خط‌های راست قرمز را با نقطه‌چین نشان داده‌ایم).

فرض می‌کنیم، از یک راس گراف، مثلاً دو یال سبز و سه یال قرمز گذشته باشد. ما به دنبال مثلث‌هایی هستیم که سه ضلع آن هم‌رنگ باشند. در این‌جا، هر یال سبز با هر یال قرمز، دو ضلع مثلثی را تشکیل می‌دهند که ضلع‌های نا هم‌رنگ دارند، یعنی روی هم، به تعداد 3×2 یا ۶ مثلث با ضلع‌های نا هم‌رنگ پدید می‌آید؛ هر یک از این مثلث‌ها (به دلیل نا هم‌رنگ بودن دو ضلع) نمی‌تواند جزو جواب مساله باشد. درضمن، حتا دو ضلع هم‌رنگی که به این نقطه رسیده‌اند ممکن است، به خاطر ضلع سوم خود، باز هم از گروه مثلث‌های مورد نظر ما، خارج شوند.

حالت کلی را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم، از راس ۱، r_1 یال سبز و $5 - r_1$ یال قرمز، از راس ۲، r_2 یال سبز و $5 - r_2$ یال قرمز و غیره گذشته باشد؛ در این صورت، روشن است که، تعداد مثلث‌های با ضلع‌های



شکل ۵۱

هم‌رنگ برابر است با

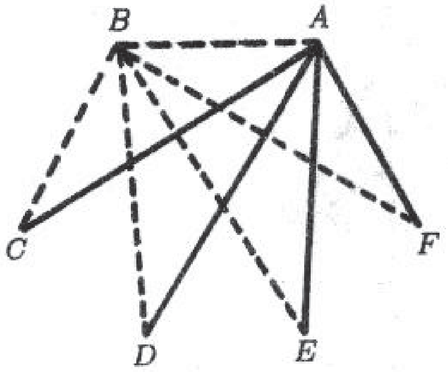
$$n = ۲۰ - \frac{۱}{۲}[r_۱(۵ - r_۱) + r_۲(۵ - r_۲) + \ldots + r_۶(۵ - r_۶)]$$

در واقع، $r_۱(۵ - r_۱)$، تعداد مثلث‌های با ضلع‌های نا هم‌رنگی را مشخص می‌کند که راس ۱ یکی از راس‌های هریک از آن‌هاست؛ به همین ترتیب، برای $r_۲(۵ - r_۲)$ و غیره. ولی در این صورت، هر یال گراف دو بار به حساب می‌آید و تعداد واقعی مثلث‌های با ضلع‌های نا هم‌رنگ، برابر نصف این مجموع می‌شود که باید از عدد ۲۰ (تعداد کل مثلث‌ها) کم شود تا تعداد مثلث‌های با ضلع‌های هم‌رنگ به دست آید.

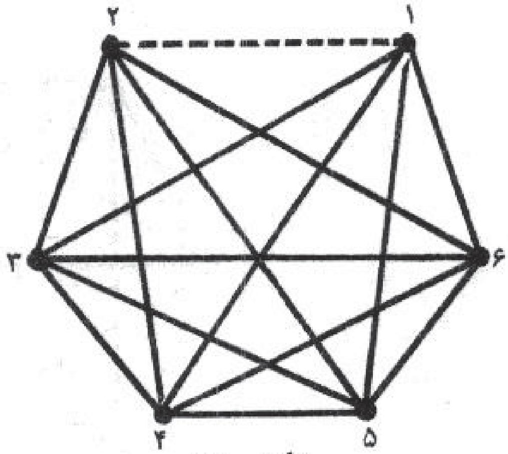
هریک از جمله‌های $r(۵ - r)$ می‌تواند یکی از عددهای ۰، ۴ یا ۶ باشد (چرا؟). بنابراین، بزرگترین عددی که ممکن است در داخل کروشه پیدا شود، برابر ۶ × ۶، یعنی ۳۶ است؛ در نتیجه، کمترین تعداد مثلث‌های با ضلع‌های هم‌رنگ برابر است با

$$n = ۲۰ - \frac{۱}{۲} \times ۳۶ = ۲۰ - ۱۸ = ۲$$

و این، همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم. نمونهٔ حالت مربوط به وجود تنها دو مثلث با ضلع‌های هم‌رنگ را در شکل ۵۱ می‌بینید (پاره‌خط‌های



شکل ۵۳



شکل ۵۲

راست پیوسته، به‌جای رنگ سبز و پاره‌خط‌های راست نقطه‌چین، به‌جای رنگ قرمز آمده‌اند): مثلث‌های ۱۳۵ و ۲۴۶ با ضلع‌های هم‌رنگ‌اند که، در این شکل، در هر دو مثلث، راس‌ها دو به دو با پاره‌خط‌های راست سبز به هم پیوسته‌اند (دو گروه سه نفری که، در هر کدام، همه با هم آشنا هستند).

یادداشت. دیدیم کمترین تعداد گروه‌های سه نفری مورد نظر ما برابر ۲ و، بیشترین تعداد ممکن برای آن‌ها ۲۰ است؛ یعنی نمی‌توان ۶ نفر را طوری در نظر گرفت که، در بین آن‌ها، تنها یک گروه سه نفری مورد نظر ما، وجود داشته باشد. آیا همهٔ حالت دیگر وجود دارد؟ آیا، برای این‌گونه گروه‌های سه نفری، می‌توان به تعداد ۳، ۴، ...، ۱۹ پیدا کرد؟

این، بحث جالبی است که می‌تواند شما را، به اندازه کافی، به اندیشه وادارد. همین قدر یادآوری می‌کنیم، اگر حالتی را که هر شش نفر دو به دو با هم آشنا یا دو به دو با هم ناآشنا باشند، کنار بگذاریم، بیشترین تعداد این‌گونه گروه‌های سه نفری، برابر ۱۶ می‌شود و آن، در حالتی پیش می‌آید که، از بین شش نفر، تنها دو نفر با هم ناآشنا باشند (یا تنها دو نفر یکدیگر را بشناسند). نمونه‌ای از این حالت را، در شکل ۵۲ نشان داده‌ایم. در این گراف، به‌جز ۴ مثلث ۱۲۳، ۱۲۴، ۱۲۵ و ۱۲۶، بقیهٔ مثلث‌ها، ضلع‌های هم‌رنگ دارند و بنابراین، تعداد آن‌ها، چنین می‌شود:

$$n = ۲۰ - ۴ = ۱۶$$

۱۹ = n نمی‌تواند باشد، زیرا برای این منظور، باید داشته باشیم:

$$r_۱(۵-r_۱)+r_۲(۵-r_۲)+\ldots+r_۶(۵-r_۶)=۲$$

که ممکن نیست (چرا؟). ۱۸ = n جواب ندارد، زیرا باید داشته باشیم:

$$r_۱(۵-r_۱)+r_۲(۵-r_۲)+\ldots+r_۶(۵-r_۶)=۴$$

برای این منظور، باید یکی از جمله‌ها، و مثلاً $r_۱(۵-r_۱)$ برابر ۴ و بقیه برابر صفر باشند. ۴ = $r_۱(۵-r_۱)$ به معنای ۱ = $r_۱$ است:

$$r_۱=۱, r_۲=r_۳=r_۴=r_۵=r_۶=۰$$

فرض کنیم از راس A، یک یال (AB) را قرمز و بقیه را سبز گرفته باشیم (شکل ۵۳). باید یال‌هایی که به همهٔ راس‌های دیگر می‌رسند، از یک رنگ باشند؛ چون به راس B، یک یال قرمز رسیده است، باید بقیه یال‌های وارد به B هم قرمز باشند؛ ولی در این صورت، در راس‌های C، D، E و F یال‌های نا هم‌رنگ به هم رسیده‌اند.

خودتان تلاش کنید و، برای حالت‌های دیگر، مشخص کنید، n چه عددهایی می‌تواند باشد و چه عددهایی نمی‌تواند باشد. به احتمالی در برخی موردها به دشواری برخورد کنید؛ نگران نباشد. حالت‌هایی را که می‌توانید با استدلال روشن کنید، معین کنید و حالت‌هایی را که نتوانسته‌اید روشن کنید، به عنوان مساله‌هایی که باید روی آن‌ها بیندیشید، نزد خود نگاه دارید.

۲۷. محاسبهٔ $(x+۱)^۶$ دشوار نیست:

$$(x+۱)^۶=[(x+۱)^۳]^۲=(x^۳+۳x^۲+۳x+۱)^۲=x^۶+$$
$$+۹x^۴+۹x^۲+۱+۶x^۵+۶x^۴+۲x^۳+۱۸x^۳+۶x^۲+$$
$$+۶x=x^۶+۶x^۵+۱۵x^۴+۲۰x^۳+۱۵x^۲+۶x+۱$$

برای $(1-x)^6$ به دو نکته توجه می‌کنیم:

۱) $(1-x)^6$ با $(x-1)^6$ تفاوتی ندارد؛

۲) اگر در $(1+x)^6$، x را به $-x$ تبدیل کنیم، به $(1-x)^6$ می‌رسیم.

بنابراین، اگر در حاصل $(1+x)^6$، همه‌جا x را به $-x$ تبدیل کنیم، حاصل $(1-x)^6$ به دست می‌آید و این، به معنای آن است که در حاصل $(1+x)^6$ جمله‌های با توان زوج را تغییر ندهیم و جمله‌های با توان فرد را، به قرینهٔ خود تبدیل کنیم:

$$(x-1)^6 = x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 15x^2 - 6x + 1$$

۲۸. پاسخ منفی است. هر خط راست شامل پارامتر، از یک نقطهٔ ثابت نمی‌گذرد. در چه حالتی، ممکن است این وضع پیش آید؟

برای این‌که خط راستی (که شامل پارامتر است) از نقطهٔ ثابتی بگذرد، باید معادلهٔ آن، به‌ازای مختصات این نقطه، نسبت به پارامتر، یک اتحاد تشکیل دهد. بنابراین، وقتی خط راستِ شامل پارامتر، از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد که، اگر معادلهٔ آن را نسبت به پارامتر یک اتحاد فرض کنیم، بتوان برای (x, y) جوابی پیدا کرد.

با مثال مطلب را روشن می‌کنیم.

مثال ۱. *آیا خط‌های راست به معادلهٔ*

$$(a+1)x + 2(a+1)y + 2a + 3 = 0 \qquad (*)$$

از نقطهٔ ثابتی می‌گذرند؟

معادله را نسبت به پارامتر a منظم می‌کنیم:

$$(x + 2y + 2)a + (x + 2y + 3) = 0$$

اگر این خط‌های راست از نقطهٔ ثابتی بگذرند، باید مختصات نقطهٔ ثابت در دستگاه

$$\begin{cases} x + ۲y + ۲ = ۰ \\ x + ۲y + ۳ = ۰ \end{cases}$$

صدق کند. ولی این دستگاه، پاسخی ندارد. در واقع، همهٔ خط‌های راست به معادلهٔ (*)، ضریب زاویه‌ای برابر ۲− دارند (چرا؟) و، در نتیجه، با هم موازی‌اند. می‌توان گفت که، نقطهٔ ثابت این خط‌های راست، به بی‌نهایت رفته است.

مثال ۲. *آیا خط‌های راستی که معادلهٔ عمومی آن‌ها در این‌جا داده شده است، از نقطهٔ ثابتی می‌گذرند؟*

$$(a - ۱)^۲x + (a^۲ - a + ۲)y + ۲(a + ۱) = ۰$$

معادلهٔ این دسته خط راست را، نسبت به پارامتر a منظم می‌کنیم:

$$(x + y)a^۲ - (۲x + y - ۲)a + (x + ۲y + ۲) = ۰$$

باید این برابری، نسبت به a، یک اتحاد باشد، یعنی داشته باشیم:

$$\begin{cases} x + y = ۰ \\ ۲x + y - ۲ = ۰ \\ x + ۲y + ۲ = ۰ \end{cases}$$

به دستگاهی می‌رسیم که، برای دو مجهول x و y، سه معادله دارد. آیا این دستگاه سازگار است؟ اگر معادله‌های اول و دوم این دستگاه را در نظر بگیریم:

$$\begin{cases} x + y = ۰ \\ ۲x + y - ۲ = ۰ \end{cases}$$

به جواب $x = ۲$، $y = -۲$ می‌رسیم که در معادلهٔ سوم دستگاه هم، صدق می‌کنند. دستگاه سه معادلهٔ دومجهولی سازگار است و مساله جواب دارد.

پاسخ. همهٔ خط‌های راست دسته خط مفروض، از نقطهٔ ثابت $(۲,-۲)$ می‌گذرند.

مثال ۳. *این دسته خط راست داده شده است:*

$$(a^۲+a+۱)x+(a^۲-a-۱)y-a(۳a-۱)=۰$$

آیا همهٔ این خط‌های راست، از نقطهٔ ثابتی می‌گذرند؟

اگر عبارت سمت چپ را، در معادلهٔ دسته خط راست، نسبت به a منظم کنیم و، سپس، نسبت به پارامتر a متحد صفر قرار دهیم:

$$(x+y-۳)a^۲+(x-y+۱)a+(x-y)=۰$$

به این دستگاه می‌رسیم:

$$\begin{cases} x+y-۳=۰ \\ x-y+۱=۰ \\ x-y=۰ \end{cases}$$

ولی این دستگاه ناسازگار است: جوابی که برای x و y از دو معادلهٔ اول دستگاه به دست می‌آید، در معادلهٔ سوم دستگاه صدق نمی‌کند.

پاسخ. خط‌های راست این دسته خط، از نقطهٔ ثابتی نمی‌گذرند.

۲۹. الف) سه‌جمله‌ای درجه دوم چیزی است، و حاصل عددی آن چیزی دیگر. درست است که حاصل عددی یک عبارت جبری، به خود عبارت بستگی دارد، ولی این بستگی، هیچ ربطی به ویژگی‌های عبارت جبری و شباهت این ویژگی‌ها با حاصل عددی آن ندارد.

آزمایش می‌توانست ما را گمراه کند. اگر سه‌جمله‌ای را A بنامیم و، با آغاز از واحد، عددهای طبیعی مختلف را به جای x بگذاریم، این نتیجه‌ها،

به دست می‌آید:

$$\left| \begin{array}{l} x = ۱ \\ A = ۱۱ \end{array} \right. ; \left| \begin{array}{l} x = ۲ \\ A = ۱۳ \end{array} \right. ; \left| \begin{array}{l} x = ۳ \\ y = ۱۷ \end{array} \right. , \left| \begin{array}{l} x = ۴ \\ A = ۲۳ \end{array} \right. ;$$

$$\left| \begin{array}{l} x = ۵ \\ A = ۳۱ \end{array} \right. ; \left| \begin{array}{l} x = ۶ \\ A = ۴۱ \end{array} \right. ; \left| \begin{array}{l} x = ۷ \\ A = ۵۳ \end{array} \right. ; \left| \begin{array}{l} x = ۸ \\ A = ۶۷ \end{array} \right. ;$$

$$\left| \begin{array}{l} x = ۹ \\ A = ۸۳ \end{array} \right. ; \left| \begin{array}{l} x = ۱۰ \\ A = ۱۰۱ \end{array} \right.$$

حتا اگر عددهای درست منفی را به‌جای x قرار دهیم:

$$\left| \begin{array}{l} x = -۱ \\ A = ۱۳ \end{array} \right. ; \left| \begin{array}{l} x = -۲ \\ A = ۱۷ \end{array} \right. ; \left| \begin{array}{l} x = -۳ \\ A = ۲۳ \end{array} \right. ; \left| \begin{array}{l} x = -۴ \\ A = ۳۱ \end{array} \right. ; \ldots$$

همه‌جا برای A، عددی اول به دست می‌آید. به‌ازای $x = ۰$ هم، عدد اول ۱۱ را خواهیم داشت. ممکن است، این پیش‌آمد (که تا حدی عجیب است)، به ما تلقین کند که، سه‌جمله‌ای A، همیشه برابر عددی اول می‌شود. ولی روشن است که این نتیجه‌گیری، دست کم برای $x = ۱۱$، درست نیست، زیرا اگر به‌جای x، عدد ۱۱ را بگذاریم، هریک از جمله‌ها و، بنابراین، تمام سه‌جمله‌ای بر ۱۱ بخش‌پذیر می‌شود:

$$A = x^۲ - x + ۱۱ = ۱۱^۲ - ۱۱ + ۱۱ = ۱۱^۲ = ۱۲۱$$

که عددی اول نیست. یا اگر $x = ۱۲۱$ بگیریم، به دست می‌آید:

$$A = ۱۲۱^۲ - ۱۲۱ + ۱۱ = ۱۱(۱۲۱ \times ۱۱ - ۱۱ + ۱) = ۱۱ \times ۱۳۲۱$$

که باز هم عددی مرکب است.

ب) مثل مسالهٔ الف)، پاسخ این پرسش هم منفی است.

$x + ۵$، از دیدگاه عبارت‌های جبری، **عبارتی اول** است، یعنی نمی‌توان آن را به صورت ضرب دو عبارت جبری حقیقی تجزیه کرد: به زبان دیگر،

$x+۵$ بر عبارت جبری دیگری بخش‌پذیر نیست. حتا عبارت جبری $۳x+۱۵$ هم، از دیدگاه جبری عبارتی اول است، گرچه بر عدد ۳ بخش‌پذیر است. عبارت جبری، *وقتی اول نیست که بر عبارت جبری دیگری بخش‌پذیر باشد.*

ولی همین عبارت $x+۵$، در مجموعهٔ عددهای درست، می‌تواند بر هر عدد درستی بخش‌پذیر باشد. $x+۵$ به‌ازای $x=۴$ بر ۹ و به‌ازای $x=-۲۲$ بر ۱۷ بخش‌پذیر است. معمول است که، در ریاضیات، می‌گویند، عددهای درست ۹ و ۱۷ (و دیگر عددهای درست)، **بخشیاب‌های پنهانی** $x+۵$ هستند. عبارت جبری $x^۲-۴$، دو **بخشیاب آشکارِ** متمایز از خود دارد: $x+۲$ و $x-۲$. ولی بی‌نهایت بخشیاب پنهانی (در مجموعهٔ عددهای درست): به‌ازای $x=۵$، بر ±۳، ±۷ و ±۲۱ و به‌ازای $x=۷$ بر ±۳، ±۵، ±۹، ±۱۵ و ±۴۵ بخش‌پذیر است.

اکنون ببینیم $x+۵$ در مجموعهٔ عددهای درست، در چه حالت‌هایی بر $x+۳$ بخش‌پذیر است؟ داریم:

$$\frac{x+۵}{x+۳}=\frac{(x+۳)+۲}{x+۳}=۱+\frac{۲}{x+۳}$$

برای این که حاصل کسر $\frac{x+۵}{x+۳}$، عددی درست باشد، باید حاصل کسر $\frac{۲}{x+۳}$، برابر عدد درستی شود. ۲ تنها بر ۴ عدد درست بخش‌پذیر است: ±۱ و ±۲. به دست می‌آید:

$$x+۳=۱\Rightarrow x=-۲;\ x+۳=-۱\Rightarrow x=-۴;$$
$$x+۳=۲\Rightarrow x=-۱;\ x+۳=-۲\Rightarrow x=-۵$$

به این ترتیب، عبارت $x+۵$، وقتی بر $x+۳$، در مجموعهٔ عددهای درست، بخش‌پذیر است که x برابر یکی از عددهای ۱−، ۲−، ۴− یا

۵– باشد که، در این صورت، حاصل کسر $\frac{x+۵}{x+۳}$، به ترتیب برابر ۲، ۳، ۱– و ۰ خواهد شد.

۳۰. پیش از حل مساله، اندکی با ویژگی‌های عبارت‌های جبری متقارن آشنا شویم. به این عبارت‌های جبری توجه کنید:

$$x+y, xy, x^۳+y^۳, x^۲+y^۲-۳xy$$

در هر کدام از این عبارت‌ها، اگر x را به y و y را به x تبدیل کنیم، دوباره همان عبارت نخستین به دست می‌آید:

$$x+y=y+x, xy=yx, x^۳+y^۳=y^۳+x^۳,$$
$$x^۲+y^۲-۳xy=y^۲+x^۲-۳yx$$

می‌گویند: هریک از این عبارت‌ها، نسبت به x و y متقارن‌اند، یعنی، در هرکدام از آن‌ها، نقش x با نقش y تفاوتی ندارد. عبارت

$$x^۳+xy^۲-۲x^۲y+y^۳$$

نسبت به x و y متقارن نیست، زیرا اگر در آن، x را به y و y را به x تبدیل کنیم، عبارت

$$y^۳+x^۲y-۲xy^۲+x^۳$$

به دست می‌آید که با عبارت نخستین، فرق دارد. عبارت

$$x^۳+y^۳-۲z$$

نسبت به x و y متقارن است، ولی نسبت به x و z یا y و z، متقارن نیست.

ویژگی اصلی یک عبارت متقارن، این است که با انجام هر عمل مجاز جبری در آن، همچنان متقارن باقی می‌ماند. در برابری‌های

$$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2);$$
$$x^2 + y^2 - 3xy = (x-y)^2 - xy$$

چون عبارت سمت چپ (در هرکدام از آن‌ها)، نسبت به x و y متقارن است، عبارت سمت راست هم، تقارن خود را نسبت به x و y حفظ کرده است. [توجه کنید: $(x-y)^2$ با $(y-x)^2$ فرقی ندارد.]

به همین ترتیب، عبارت‌های جبری

$$x+y+z, xyz, xy+xz+yz, x^3+y^3+z^3,$$

نسبت به x و y و z متقارن‌اند: در هرکدام از آن‌ها، هر دو مجهول دلخواه (x و y یا x و z یا y و z) را به هم تبدیل کنیم، عبارت جبری، بی‌تغییر می‌ماند.

توجه کنید: *عبارتی نسبت به ۳ یا ۴ یا، به طور کلی n مجهول متقارن است که، در آن، بتوان هر دو مجهول دلخواه را به هم تبدیل کرد، بدون این که عبارت دچار تغییر شود.*

در عبارت‌هایی هم که نسبت به چند مجهول متقارن‌اند، همان ویژگی اصلی عبارت‌های متقارنِ نسبت به دو مجهول برقرار است.

به حل مسالهٔ ۳۰ می‌پردازیم. این نام‌گذاری‌ها را می‌پذیریم:

$$A = (x+y+z)^m - x^m - y^m - z^m$$
$$B = (x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$$

باید ببینیم، به‌ازای کدام عددهای طبیعی m، عبارت A بر عبارت B بخش‌پذیر است. هر دو عبارت A و B نسبت به x و y و z متقارن‌اند. تلاش می‌کنیم،

عبارت B را، به ضرب عامل‌های درجه اول تجزیه کنیم. در تجزیهٔ عبارت B، عامل $x+y$ وجود دارد، زیرا اگر B به صورت ضرب $(x+y)$ در عبارتی درآید، باید به‌ازای $x=-y$ برابر صفر شود؛ حاصل عبارت B را به‌ازای $x=-y$ به دست می‌آوریم: اگر $x=-y$، آن‌گاه

$$B=(-y+y+z)^۳-(-y)^۳-y^۳-z^۳=$$
$$=z^۳+y^۳-y^۳-z^۳=۰$$

پس B دارای عامل $x+y$، یعنی بر $x+y$ بخش‌پذیر است. ولی B نسبت به x و y و z متقارن است، بنابراین باید حاصل آن، بعد از تجزیه، باز هم نسبت به x و y و z متقارن باشد؛ و چون B بر $x+y$ بخش‌پذیر است، باید بر $y+z$ و $z+x$ هم بخش‌پذیر باشد. در نتیجه، عبارت B به این صورت درمی‌آید:

$$B=(x+y+z)^۳-x^۳-y^۳-z^۳=a(x+y)(y+z)(z+x)$$

a، یک عدد ثابت است، زیرا حاصل‌ضرب سه پرانتز سمت راست برابری مثلاً نسبت به x، از درجهٔ دوم و عبارت سمت چپ برابری هم نسبت به x، از درجهٔ دوم است (اگر پرانتز را باز کنیم، جمله‌های درجه سوم از بین می‌روند).

برای پیدا کردن مقدار a، سه عدد دلخواه در دو طرف برابری، به جای x و y و z می‌گذاریم، مثلاً $x=۰$، $y=۱$، $z=۲$:

$$(۰+۱+۲)^۳-۱^۳-۲^۳=a(۰+۱)(۱+۲)(۲+۰)$$

از آن‌جا $۶a=۱۸$ و $a=۳$.

به این ترتیب، نتیجهٔ تجزیهٔ عبارت B به دست آمد:

$$B=۳(x+y)(y+z)(z+x)$$

برای این‌که A بر B بخش‌پذیر باشد، باید A بر یکی از سه عامل

$$x+y, y+z, z+x$$

بخش‌پذیر باشد، زیرا A نسبت به x و y و z متقارن است و اگر بر یکی از این عبارت‌ها بخش‌پذیر باشد، بر دو عبارت دیگر هم بخش‌پذیر خواهد بود.

برای این‌که A بر $x+y$ بخش‌پذیر باشد، باید به‌ازای $x=-y$ برابر صفر شود. اگر $x=-y$، آن‌گاه

$$A=(-y+y+z)^m-(-y)^m-y^m-z^m=-(-y)^m-y^m$$

و روشن است که، $-(-y)^m-y^m$ وقتی برابر صفر می‌شود که m عددی فرد باشد.

پاسخ. برای این‌که A بر B بخش‌پذیر باشد، باید m عددی فرد انتخاب شود ($m=۲k+۱$).

۳۱. پیدا کردن نقطه‌های ثابت واقع بر یک دسته سهمی (اگر چنین نقطه‌هایی وجود داشته باشد)، شبیه پیدا کردن نقطهٔ ثابت واقع بر دسته خط راست است. معادلهٔ دسته سهمی را نسبت به پارامتر a منظم و متحد با صفر قرار می‌دهیم:

$$(x^۲-x)a+(x+y+۲)=۰$$

که از آن‌جا، به این دستگاه می‌رسیم:

$$\begin{cases} x^۲-x=۰ \\ x+y+۲=۰ \end{cases} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x=۰ \\ y=-۲ \end{array} \right. , \left| \begin{array}{l} x=۱ \\ y=-۳ \end{array} \right.$$

پاسخ. همهٔ منحنی‌های این دسته سهمی از دو نقطهٔ $(۰,-۲)$ و $(۱,-۳)$ می‌گذرند.

۳۲. پیش از حل این مساله، حل مسالهٔ ۱۹۱ را در صفحهٔ ۳۶۶ جلد دوم «ریاضیات محاسبه‌ای» ببینید.

الف) دسته خطهای راست

$$(x - y + ۳) + m(۲x + y - ۹) = ۰ \qquad (۱)$$

شامل همهٔ خطهای راستی است که از نقطهٔ برخورد دو خط راست مفروض می‌گذرند. البته، به‌جز خط راست $۲x + y - ۹ = ۰$. ما خط راستی را می‌خواهیم که، در ضمن، از نقطهٔ $(-۲, ۰)$ هم گذشته باشد. باید مختصات این نقطه در معادلهٔ (۱) صدق کند:

$$(-۲ - ۰ + ۳) + m(-۴ + ۰ - ۹) = ۰ \Rightarrow m = \frac{۱}{۱۳}$$

و بنابراین، معادلهٔ خط راست مورد نظر، با قرار دادن $m = \frac{۱}{۱۳}$ در معادلهٔ (۱) به دست می‌آید:

$$۵x - ۴y + ۱۰ = ۰$$

ب) ضریب زاویهٔ هر یک از خطهای راست به معادلهٔ (۱) برابر $\frac{۲m + ۱}{۱ - m}$ و ضریب زاویهٔ خط راست مورد نظر ما برابر $\frac{۳}{۲}$ است، پس

$$\frac{۲m + ۱}{۱ - m} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow m = \frac{۱}{۷}$$

که با قرار دادن آن در معادلهٔ (۱)، معادلهٔ خط راست مورد نظر به دست می‌آید:

$$۳x - ۲y + ۴ = ۰$$

۳۳. به سادگی می‌توان ثابت کرد، به‌ازای هر $n \geq ۱$، نابرابری

$$\sqrt{n + ۱} - \sqrt{n} < \sqrt{n} - \sqrt{n - ۱} \qquad (۱)$$

یک نابرابری اتحادی است.

در واقع، اگر برای هریک از عبارت‌های سمت چپ و سمت راست نابرابری (۱)، مخرجی برابر واحد در نظر بگیریم و، سپس، در هر طرف، صورت و مخرج را در مزدوج صورت ضرب کنیم، به این نابرابری می‌رسیم:

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$$

و درستی این نابرابری روشن است، زیرا هریک از جمله‌های مخرج در سمت چپ نابرابری، از جملهٔ نظیر خود در مخرج سمت راست نابرابری بزرگتر و، بنابراین، مقدار کسر سمت چپ، از مقدار کسر سمت راست کوچکتر است.

با توجه به نابرابری (۱)، می‌توان نوشت (به‌جای n در نابرابری (۱)، به‌ترتیب، عددهای ۱، ۳، ۵، ۷ و ۹ را قرار می‌دهیم):

$$\sqrt{2}-\sqrt{1}<\sqrt{1}$$
$$\sqrt{4}-\sqrt{3}<\sqrt{3}-\sqrt{2}$$
$$\sqrt{6}-\sqrt{5}<\sqrt{5}-\sqrt{4}$$
$$\sqrt{8}-\sqrt{7}<\sqrt{7}-\sqrt{6}$$
$$\sqrt{10}-\sqrt{9}<\sqrt{9}-\sqrt{8}$$

و اگر، این نابرابری‌ها را با هم جمع کنیم، پس از ساده کردن، به دست می‌آید:

$$\sqrt{2}+\sqrt{4}+\sqrt{6}+\sqrt{8}+\frac{1}{2}\sqrt{10} < \sqrt{1}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{9}$$

پاسخ. $B < A$.

۳۴. آیا p، q و r می‌توانند یک‌رقمی باشند؟ می‌دانیم:

$$a = 10k+p,\ b = 10k+q,\ c = 10k+r$$

بنابراین، باید داشته باشیم:

$$(10k+p)^2+(10k+q)^2=(10k+r)^2 \Rightarrow 5k+p+q=r$$

(مواظب باشید k مخالف صفر است). اگر دو طرف برابری اخیر را به توان ۲ برسانیم، با توجه به برابری $p^2+q^2=r^2$، به دست می‌آید:

$$25k^2+10k(p+q)=0$$

که ممکن نیست (مقدار مثبت، نمی‌تواند برابر صفر باشد).

اگر هر سه عدد p، q و r را، دو رقمی فرض کنیم، با همین روش، به تناقض می‌رسیم و ناممکن بودن جواب روشن می‌شود.

بنابراین، یکی از دو عدد p و q، و مثلاً p را، یک رقمی و دیگری را دو رقمی فرض می‌کنیم؛ در این صورت r هم، عددی دو رقمی می‌شود، باید داشته باشیم:

$$(10k+p)^2+(100k+q)^2=(100k+r)^2$$

که از آن‌جا به دست می‌آید:

$$5k+p+10q=10r$$

برای این‌که، این برابری برقرار باشد، باید p بر ۵ بخش‌پذیر باشد و چون p، عددی یک‌رقمی و مخالف صفر است، به دست می‌آید: $p=5$. از برابری

$$p^2+q^2=r^2 \Rightarrow (r+q)(r-q)=25$$

می‌توان q و r را هم به دست آورد. داریم:

$$25=5\times 5=25\times 1$$

که تنها در حالت $q + r = ۲۵$ و $r - q = ۱$ به جواب می‌رسد:

$$r = ۱۳, q = ۱۲$$

آزمایش نشان می‌دهد که

$$۱۵^{۲} + ۱۱۲^{۲} = ۱۱۳^{۲}$$

پاسخ. $p = ۵$، $q = ۱۲$، $r = ۱۳$ و $k = ۱$. یا $p = ۱۲$، $q = ۵$، $r = ۱۳$ و $k = ۱$.

۳۵. به ترتیب داریم:

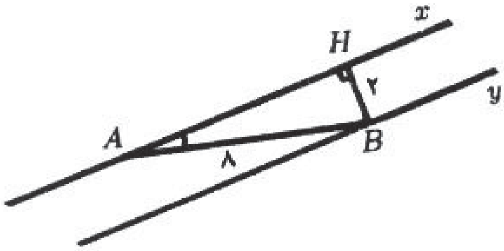
$$۲^{۹۴} + ۱ = (۳^{۹۴} + ۲ \times ۲^{۴۷} + ۱) - ۲^{۴۸} =$$
$$= (۲^{۴۷} + ۱)^{۲} - ۲^{۴۸} = (۲^{۴۷} + ۱ + ۲^{۲۴})(۲^{۴۷} + ۱ - ۲^{۲۴})$$

۳۶. فرض می‌کنیم، دو خط راست مورد نظر Ax و By باشند. اگر از B عمودی بر Ax رسم کنیم، باید طول عمود برابر ۲ باشد. در مثلث قائم‌الزاویه ABH (شکل ۵۴) داریم:

$$\sin(\widehat{BAH}) = \frac{|BH|}{|AB|} = \frac{۱}{۴}$$

ساختن زاویه‌ای حاده که، سینوس آن برابر $\frac{۱}{۴}$ باشد دشوار نیست: مثلث قائم‌الزاویه‌ای بسازید که وتر آن برابر ۴ و یک ضلع مجاور به زاویهٔ قائمه در آن برابر ۱ باشد؛ زاویهٔ روبه‌روی به این ضلع، سینوسی برابر $\frac{۱}{۴}$ دارد. دنبالهٔ کار روشن است.

تحقیق کنید، مساله چند جواب دارد، درضمن، راه حل هندسی مساله را پیدا کنید، یعنی روشن کنید به یاری خط‌کش و پرگار، چگونه می‌توان این دو خط راست موازی را رسم کرد؟



شکل ۵۴

۳۷. الف) مبداء مختصات را در نقطهٔ A و محور $x'x$ را در امتداد ضلع AB از چهارضلعی غیر مشخص $ABCD$ می‌گیریم و برای راس‌ها این مختصات را انتخاب می‌کنیم:

$$A\left|\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right. ,\ B\left|\begin{matrix}a\\0\end{matrix}\right. ,\ C\left|\begin{matrix}b\\c\end{matrix}\right. ,\ D\left|\begin{matrix}d\\e\end{matrix}\right.$$

اگر وسط ضلع‌های AB، BC، CD و DA را، به ترتیب A'، B'، C' و D' بنامیم، به سادگی به دست می‌آید:

$$A'\left|\begin{matrix}\frac{a}{۲}\\0\end{matrix}\right. ,\ B'\left|\begin{matrix}\frac{a+b}{۲}\\\frac{c}{۲}\end{matrix}\right. ,\ C'\left|\begin{matrix}\frac{b+d}{۲}\\\frac{c+e}{۲}\end{matrix}\right. ,\ D'\left|\begin{matrix}\frac{d}{۲}\\\frac{e}{۲}\end{matrix}\right.$$

باید ثابت کنیم چهارضلعی $A'BC'D'$ متوازی‌الاضلاع است. برای رسیدن به این نتیجه، باید ثابت کنیم خط‌های راست $A'B'$ و $C'D'$، همچنین خط‌های راست $B'C'$ و $A'D'$ موازی‌اند. برای اثبات موازی بودن دو خط راست، کافی است نشان دهیم، ضریب زاویه‌هایی برابر دارند. ضریب زاویهٔ هریک از خط‌های راستی را که از ضلع‌های چهارضلعی $A'B'C'D'$

می‌گذرند، پیدا می‌کنیم:

$$m_{A'B'} = \frac{\frac{c}{۲}}{\frac{a+b}{۲} - \frac{a}{۲}} = \frac{c}{b},$$

$$m_{B'C'} = \frac{\frac{c}{۲} - \frac{c+e}{۲}}{\frac{a+b}{۲} - \frac{b+d}{۲}} = \frac{e}{d-a},$$

$$m_{C'D'} = \frac{\frac{c+e}{۲} - \frac{e}{۲}}{\frac{b+d}{۲} - \frac{d}{۲}} = \frac{c}{b},$$

$$m_{D'A'} = \frac{\circ - \frac{e}{۲}}{\frac{a}{۲} - \frac{d}{۲}} = \frac{e}{d-a}$$

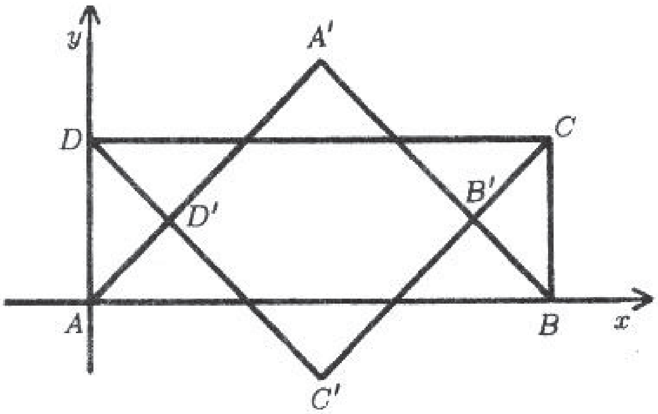
و می‌بینیم $m_{A'B'} = m_{C'D'}$ و $m_{B'C'} = m_{D'A'}$.

ب) محورهای مختصات را طوری در نظر می‌گیریم که مبداء مختصات بر راس A و محور $x'x$ در جهت امتداد از A به B در مستطیل $ABCD$ باشد. مختصات راس‌های مستطیل به این صورت‌اند (شکل ۵۵):

$$A\left|\begin{matrix}\circ\\\circ\end{matrix}\right., \quad B\left|\begin{matrix}a\\\circ\end{matrix}\right. \quad C\left|\begin{matrix}a\\b\end{matrix}\right., \quad D\left|\begin{matrix}\circ\\b\end{matrix}\right.$$

نیمساز زاویهٔ A، با محور $x'x$، زاویه‌ای برابر ۴۵ درجه می‌سازد و بنابراین، چون از مبداء مختصات می‌گذرد، معادله‌ای به صورت $y = x$ دارد.

نیمساز زاویهٔ B با جهت مثبت محور $x'x$ زاویهٔ ۱۳۵ درجه می‌سازد، بنابراین، این نیمساز، ضریب زاویه‌ای برابر ۱ − دارد و از $B(a, \circ)$ می‌گذرد؛



شکل ۵۵

پس معادلهٔ آن به صورت

$$y - \circ = -\text{۱}(x - a) \Rightarrow y = -x + a$$

است. این دو نیمساز (نیمسازهای دو زاویهٔ A و B) بر هم عمودند (زیرا، ضریب زاویه‌های آن‌ها، عکس قرینهٔ یکدیگرند) و در نقطهٔ $A'\left(\frac{a}{\text{۲}}, \frac{a}{\text{۲}}\right)$ به هم می‌رسند.

به همین ترتیب، ثابت می‌شود، ضلع‌های مجاور در چهارضلعی $A'B'C'D'$ بر هم عمودند، یعنی این چهارضلعی یک مستطیل است. مختصات راس‌های دیگر این چهار ضلعی هم به دست می‌آید:

$$A'\left|\begin{array}{l}\frac{a}{\text{۲}}\\ \frac{a}{\text{۲}}\end{array}\right. ,\ B'\left|\begin{array}{l}\frac{\text{۲}a-b}{\text{۲}}\\ \frac{b}{\text{۲}}\end{array}\right. ,\ C'\left|\begin{array}{l}\frac{a}{\text{۲}}\\ \frac{\text{۲}b-a}{\text{۲}}\end{array}\right. ,\ D'\left|\begin{array}{l}\frac{b}{\text{۲}}\\ \frac{b}{\text{۲}}\end{array}\right.$$

می‌بینیم خط راست $A'C'$ موازی با محور $y'y$ و خط راست $B'D'$ موازی با محور $x'x$ است و بنابراین بر هم عمودند و مستطیلی که دو قطر عمود بر هم داشته باشند، مربع است.

درضمن، اگر طول ضلع‌های چهار ضلعی $A'B'C'D'$ را به دست بیاوریم، هریک از آن‌ها، برابر $\frac{|a-b|}{\sqrt{\text{۲}}}$ خواهد شد.

۳۸. در آغاز یادآوری می‌کنیم که $۲^{۲^۵}$، یعنی $۲^{(۲^۵)}$ که برابر $۲^{۳۲}$ می‌شود و با $(۲^۲)^۵$، یعنی $۴^۵$ یا $۲^{۱۰}$ فرق دارد.

پیرفرما، ریاضی‌دان فرانسوی که در سال‌های از ۱۶۰۱ تا ۱۶۶۵ میلادی زندگی می‌کرد، گمان می‌بُرد، به شرط این‌که n عدد درست و غیر منفی باشد، عدد

$$A_n = ۲^{۲^n} + ۱$$

عددی اول است. در واقع هم

$$n = ۰ \Rightarrow A_۰ = ۲^{۲^۰} + ۱ = ۲^۱ + ۱ = ۳;$$
$$n = ۱ \Rightarrow A_۱ = ۲^۲ + ۱ = ۵;$$
$$n = ۲ \Rightarrow A_۲ = ۲^۴ + ۱ = ۱۷;$$
$$n = ۳ \Rightarrow A_۳ = ۲^۸ + ۱ = ۲۵۷;$$
$$n = ۴ \Rightarrow A_۴ = ۲^{۱۶} + ۱ = ۶۵۵۳۷$$

عددهایی اول‌اند، یعنی هر کدام از آن‌ها، به‌جز ۱ و خود عدد، بر عدد دیگری بخش‌پذیر نیستند.

ولی می‌توان ثابت کرد که عدد $A_۵ = ۲^{۲^۵} + ۱$، یعنی $۲^{۳۲} + ۱$، اول نیست و بر ۶۴۱ بخش‌پذیر است.

$۲^{۱۶}$، یعنی ۶۵۵۳۶، در تقسیم بر ۶۴۱، باقی‌مانده‌ای برابر ۱۵۴ پیدا می‌کند.

$$۲^{۱۶} = ۶۵۵۳۶ = ۶۴۱ \times ۱۰۲ + ۱۵۴$$

بنابراین، باقی‌ماندهٔ حاصل از تقسیم $۲^{۳۲}$ بر ۶۴۱ برابر باقی‌ماندهٔ حاصل از تقسیم $۱۵۴^۲$، یعنی ۲۳۷۱۶، بر ۶۴۱ خواهد بود:

$$۲۳۷۱۶ = ۶۴۱ \times ۳۶ + ۶۴۰$$

و بنابراین، عدد $۱ + ۱۵۴^۲$ و، درنتیجه، عدد $۱ + ۲^{۳۲}$ بر ۶۴۱ بخش‌پذیر است. به این ترتیب، گمان فرما، مبنی بر این‌که، برای عددهای غیر منفی و درست n، عدد $۱ + ۲^{۲^n}$، عددی اول است، درست نیست، زیرا این عدد، به‌ازای $n = ۵$ بر ۶۴۱ بخش‌پذیر است.

۳۹. اگر فرض کنیم $۲x + ۱ = t$، باید عبارت A را بر حسب توان‌های نزولی t منظم کنیم. x را برحسب t محاسبه می‌کنیم:

$$۲x + ۱ = t \Rightarrow x = \frac{۱}{۲}(t - ۱)$$

در نتیجه داریم:

$$x^۴ = \frac{۱}{۱۶}(t - ۱)^۴ = \frac{۱}{۱۶}(t^۲ - ۲t + ۱)^۲ =$$
$$= \frac{۱}{۱۶}(t^۴ - ۴t^۳ + ۶t^۲ - ۴t + ۱);$$
$$x^۳ = \frac{۱}{۸}(t - ۱)^۳ = \frac{۱}{۸}(t^۳ - ۳t^۲ + ۳t - ۱);$$
$$x^۲ = \frac{۱}{۴}(t - ۱)^۲ = \frac{۱}{۴}(t^۲ - ۲t + ۱)$$

بنابراین، برای عبارت A به دست می‌آید:

$$A = (t^۴ - ۴t^۳ + ۶t^۲ - ۴t + ۱) - ۳(t^۳ - ۳t^۲ + ۳t - ۱) +$$
$$+ (t^۲ - ۲t + ۱) - ۵(t - ۱) + ۱ =$$
$$= t^۴ - ۷t^۳ + ۱۶t^۲ - ۲۰t + ۱۱$$

که اگر به جای t، مقدارش $۲x + ۱$ را قرار دهیم، جواب به دست می‌آید:

$$A = (۲x+۱)^۴ - ۷(۲x+۱)^۳ + ۱۶(۲x+۱)^۲ - ۲۰(۲x+۱) + ۱۱$$

محور و مرکز تقارن

۴۰. ۱) در مثلث متساوی‌الساقین، ارتفاع وارد از راس بین دو ساق بر قاعده، محور تقارن مثلث است؛ شکل مرکز تقارن ندارد.

۲) مثلث متساوی‌الاضلاع، سه محور تقارن دارد (هریک از سه ارتفاع) ولی مرکز تقارن ندارند.

۳) خط راستی که در نقطهٔ وسط پاره‌خط راست AB بر AB عمود باشد، محور تقارن، و نقطهٔ وسط پاره‌خط راست AB، مرکز تقارن آن است. امتداد پاره‌خط راست را هم، می‌توان محور تقارنی از آن دانست.

۴) برای یک خط راست، هر خط راست دیگری که بر آن عمود باشد، محور تقارن آن و، هر نقطهٔ واقع بر خط راست، مرکز تقارن آن است. در خط راست، خود خط راست را هم می‌توان محور تقارنی از آن دانست، زیرا تعریف محور تقارن دربارهٔ آن صدق می‌کند.

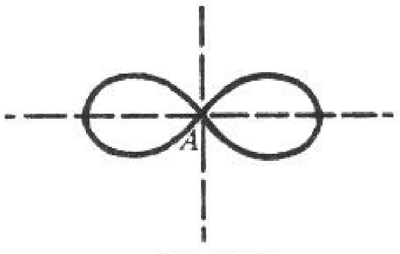
۵) نیم‌خط راست، تنها یک محور تقارن دارد: خودش؛ محور تقارن دیگری ندارد، مرکز تقارن هم ندارد.

۶) مثلث قائم‌الزاویه، مرکز تقارن ندارد (زیرا، هیچ‌گونه‌ای از مثلث دارای مرکز تقارن نیست) و تنها در حالت متساوی‌الساقین بودن، دارای یک محور تقارن است (ارتفاع وارد بر وتر).

۷) مستطیل، دو محور تقارن دارد: خط‌های راستی که از وسط ضلع‌های روبه‌رو می‌گذرد. نقطهٔ برخورد این دو محور تقارن (که بر نقطهٔ برخورد قطرهای مستطیل منطبق است)، مرکز تقارن مستطیل است.

۸) لوزی دو محور تقارن (قطرها) و یک مرکز تقارن (نقطهٔ برخورد قطرها) دارد.

۹) مربع چهار محور تقارن (دو قطر و دو خط راستی که وسط ضلع‌های روبه‌رو را به هم وصل می‌کنند) و یک مرکز تقارن (نقطهٔ برخورد قطرها) دارد.



شکل ۵۶

۱۰) ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین مرکز تقارن در حالت کلی ندارد، ولی خط راستی که از نقطه‌های وسط دو قاعده می‌گذرد، محور تقارن آن است.

۱۱) دایره یک مرکز تقارن (مرکز دایره) و بی‌نهایت محور تقارن (امتداد هریک از قطرها) دارد.

۱۲) نشانهٔ ∞، دو محور تقارن و یک مرکز تقارن (نقطهٔ A) دارد (شکل ۵۶).

۴۱. M را نقطه‌ای از شکل می‌گیریم و قرینهٔ آن را نسبت به یکی از محورهای تقارن، M_1 می‌نامیم. پس M_1 نقطه‌ای از شکل است. اکنون قرینهٔ M_1 را نسبت به محور تقارن دوم M_2 می‌نامیم؛ ولی M_2 (که متعلق به شکل است) قرینهٔ M نسبت به نقطهٔ برخورد محورهای تقارن است، یعنی نقطهٔ برخورد محورهای تقارن (اگر بر هم عمود باشند) مرکز تقارن شکل است.

عکس این حکم همیشه درست نیست. مثلاً متوازی‌الاضلاع دارای یک مرکز تقارن است (نقطهٔ برخورد قطرها)، ولی هیچ محور تقارنی از این مرکز تقارن نمی‌گذرد.

البته، اگر شکلی دارای یک مرکز تقارن باشد و بدانیم یک محور تقارن از این نقطه می‌گذرد، آن وقت، شکل مفروض، محور تقارن دیگری هم دارد که از مرکز تقارن می‌گذرد و بر محور تقارن اول عمود است.

۴۲. ۱) معادلهٔ محور تقارن را $x = a$ فرض می‌کنیم و معادلهٔ تازهٔ

منحنی را، وقتی مبداء مختصات به نقطهٔ $O'(a, ۰)$ منتقل شود، پیدا می‌کنیم:

$$(x = X + a, Y = y) \Rightarrow Y = (X + a)^۲ + (X + a) + ۱$$

که بعد از باز کردن پرانتزها، به این صورت درمی‌آید:

$$Y = X^۲ + (۲a + ۱)X + a^۲ + a + ۱$$

باید a را طوری پیدا کرد که، این معادله، نسبت به x زوج باشد، یعنی با تبدیل X به $-X$ تغییر نکند. برای این منظور، باید ضریب X برابر صفر شود: $۲a + ۱ = ۰$ یا $a = -\frac{۱}{۲}$.

خط راست $x = -\frac{۱}{۲}$، که با محور عرض موازی است، محور تقارن منحنی معادلهٔ مفروض است.

۲) پاسخ. $x = ۰$ (محور $y'y$)؛ ۳) $x = ۰$؛

۴) معادله را می‌توان این‌طور نوشت:

$$y = (x + ۲)^۲ + |x + ۲| = X^۲ + |X|$$

که در آن $X = x + ۲$. معادلهٔ $y = X^۲ + |X|$ نموداری دارد که نسبت به محور $y'y$ متقارن است، زیرا با تبدیل X به $-X$ تغییر نمی‌کند. معادلهٔ محور تقارن $X = ۰$ یا $x + ۲ = ۰$ یا $x = -۲$ است؛ معادلهٔ مفروض، محور تقارنی موازی محور $y'y$ به معادلهٔ $x = -۲$ دارد.

۴۳. ۱) هر نقطهٔ واقع بر خط راست را می‌توان مرکز تقارن آن به حساب آورد.

۲) معادلهٔ $y = x^۳ + ۳x$ با تبدیل x به $-x$ و y به $-y$ تغییر نمی‌کند، بنابراین، مبداء مختصات مرکز تقارن آن است.

۳) اگر فرض کنیم $Y = y - ۱$، معادلهٔ منحنی به صورت $Y = x^۳$ درمی‌آید که، نقطهٔ به طول $x = ۰$ و عرض $Y = ۰$ مرکز تقارن آن است. از برابری $Y = ۰$، به دست می‌آید $y = ۱$.

پاسخ. مرکز تقارن منحنی، در نقطهٔ $\omega(۰, ۱)$ است.

۴) معادلهٔ منحنی را می‌توان به این صورت نوشت:

$$xy - ۲x - ۱ = ۰$$

اگر مرکز تقارن منحنی را، در نقطهٔ $\omega(\alpha, \beta)$ فرض کنیم، معادلهٔ تازه منحنی، بعد از انتقال محورهای مختصات به نحوی که مبداء تازه در نقطهٔ ω باشد، چنین می‌شود:

$$(X + \alpha)(Y + \beta) - ۲(X + \alpha) - ۱ = ۰;$$
$$XY + (\beta - ۲)X + \alpha Y + (\alpha\beta - ۲\alpha - ۱) = ۰$$

جمله‌های XY و $\alpha\beta - ۲\alpha - ۱$ با تبدیل X به $-X$ و Y به $-Y$، تغییر نمی‌کنند، بنابراین، برای این‌که، مبداء مختصات (یعنی ω) مرکز تقارن نمودار این معادله باشد، باید ضریب‌های X و Y برابر صفر شوند:

$$\beta - ۲ = ۰,\ \alpha = ۰$$

پاسخ. نقطهٔ $\omega(۰, ۲)$ مرکز تقارن نمودار معادله است.

۵) پاسخ. نقطهٔ $\omega\left(-\frac{۳}{۲}, ۰\right)$.

۶) اگر محورهای مختصات را، موازی با خود، جابه‌جا کنیم تا مبداء تازه در نقطهٔ $\omega(\alpha, \beta)$ قرار گیرد، معادلهٔ نمودار، در دستگاه تازه، چنین می‌شود:

$$Y = X^۳ + (۳\alpha + ۱)X^۲ + (۳\alpha^۲ + ۲\alpha)X + (\alpha^۳ + \alpha^۲ - \beta)$$

برای این‌که، این معادله، با تبدیل X به $-X$ و Y به $-Y$ تغییر نکند، باید ضریب‌های جمله‌های با توان زوج X، یعنی $۳\alpha + ۱$ و $(\alpha^۳ + \alpha^۲ - \beta)$ (که ضریب $X^۰$ است و صفر هم، عددی است زوج) برابر صفر شوند:

$$\begin{cases} ۳\alpha + ۱ = ۰ \\ \alpha^۳ + \alpha^۲ - \beta = ۰ \end{cases} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \alpha = -\frac{۱}{۳} \\ \beta = \frac{۲}{۲۷} \end{array} \right.$$

پاسخ. $\omega\left(-\frac{۱}{۳}, \frac{۲}{۲۷}\right)$.

۴۴. معادلهٔ مفروض را می‌توان به این صورت نوشت:

$$y = (x - ۳)^۲ + |x - ۳| - ۲ \qquad (*)$$

این معادله، با فرض $X = x - ۳$، به صورت $y = X^۲ + |X| - ۲$ درمی‌آید که، نسبت به X زوج است، یعنی با تبدیل X به $-X$ تغییر نمی‌کند. بنابراین، $X = ۰$ یا $x = ۳$ محور تقارن نمودار معادلهٔ $(*)$ است.

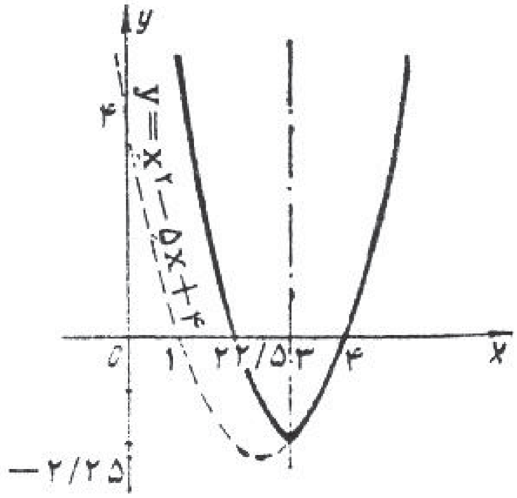
برای رسم نمودار معادلهٔ $(*)$، کافی است بخشی از نمودار را که در نیم‌صفحهٔ $x \geq ۳$ قرار دارد، رسم کنیم و، سپس، قرینهٔ آن را نسبت به خط راست $x = ۳$ به دست آوریم.

برای $x \geq ۳$، معادلهٔ $(*)$ به صورت

$$y = x^۲ - ۵x + ۴$$

درمی‌آید. که، نمودار آن، در نقطه $(۲/۵, ۲/۲۵)$ به پایین‌ترین نقطهٔ خود می‌رسد و در نقطهٔ $(۳, -۲)$ خط راست $x = ۳$ را قطع می‌کند. نمودار معادلهٔ $(*)$ در شکل ۵۷ داده شده است.

یادداشت. با توجه به حل مسالهٔ ۴۴، می‌توان نتیجه گرفت:



شکل ۵۷

اگر معادلهٔ یک نمودار، نسبت به x زوج باشد (یعنی $y'y$ محور تقارن نمودار آن باشد)، آن وقت اگر در این معادله، x را به $x - a$ تبدیل کنیم، به معادلهٔ تازه‌ای می‌رسیم که، خط راست $x = a$، محور تقارن آن نمودار است.

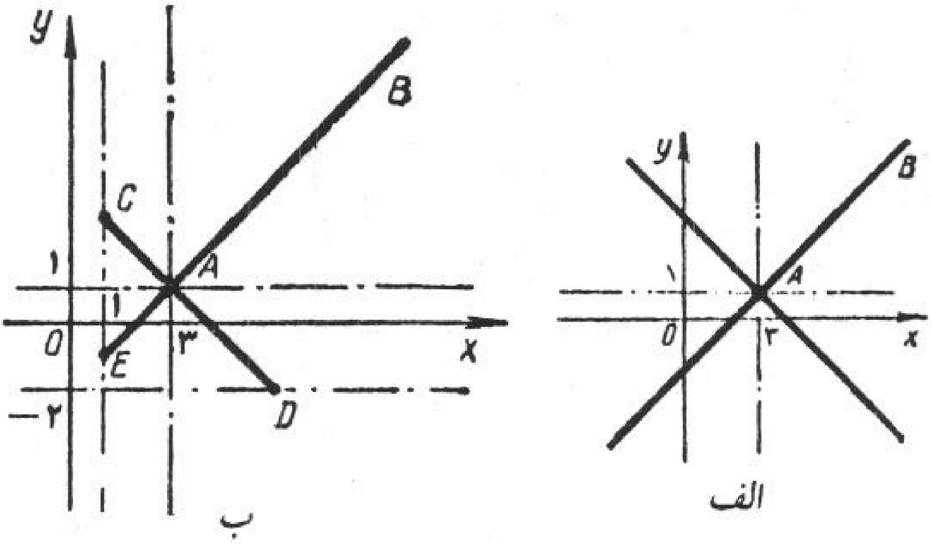
۴۵. اگر در معادلهٔ

$$||y + ۲| - ۳| = |۲ - |x - ۱|| \qquad (۱)$$

فرض کنیم $X = x - ۱$ و $Y = y + ۲$ به معادلهٔ

$$||Y| - ۳| = |۲ - |X|| \qquad (۲)$$

می‌رسیم که اگر در آن، X را به $-X$، یا Y را به $-Y$ و یا در یک زمان X را به $-X$ و Y را به $-Y$ تبدیل کنیم، تغییر نمی‌کند؛ بنابراین خط‌های راست $X = ۰$ و $Y = ۰$ محورهای تقارن و نقطهٔ با مختصات $(۰, ۰)$ مرکز تقارن نمودار معادلهٔ (۲) در دستگاه $XO'Y$ است. چون $X = x - ۱$ و $Y = y + ۲$، بنابراین خط‌های راست $x = ۱$ و $y = -۲$ محورهای تقارن و نقطهٔ با مختصات $(۱, -۲)$ مرکز تقارن نمودار معادلهٔ (۱) است.



شکل ۵۸

به این ترتیب، کافی است یک چهارم نمودار معادلهٔ (۱) را، برای $x \geq ۱$ و $y \geq -۲$ رسم کنیم و، سپس، با پیدا کردن قرینه‌های آن، نسبت به دو خط راست $x = ۱$ و $y = -۲$ و نقطهٔ $(۱, -۲)$، تمام نمودار را به دست آوریم.

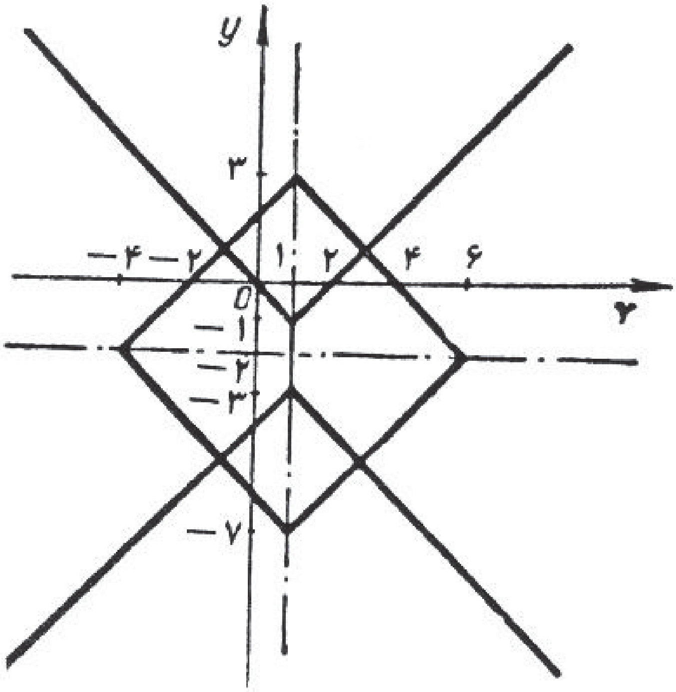
معادلهٔ (۱)، برای $x \geq ۱$ و $y \geq -۲$، به این صورت درمی‌آید:

$$|y - ۱| = |۳ - x| \qquad (۳)$$

معادلهٔ (۳) را می‌توان (برای همهٔ مقدارهای x و y)، این طور نوشت

$$y - ۱ = \pm(۳ - x| \Rightarrow \left| \begin{array}{l} y = x - ۲ \\ y = -x + ۴ \end{array} \right.$$

که مُعرف دو خط راست‌اند (یکی موازی نیمساز ربع اول و دیگری موازی نیمساز ربع دوم). ما از این دو خط راست، تنها بخش‌هایی را لازم داریم که، برای آن‌ها، داشته باشیم: $x \geq ۱$ و $y \geq -۲$. در شکل ۵۸ــالف، نمودار دو خط راست به طور کامل، و در شکل ۵۸ــب، همین نمودار، با



شکل ۵۹

در نظر گرفتن شرط‌های $x \geq 1$ و $y \geq -2$ رسم شده است. اکنون باید قرینه‌های شکل ۵۸ـب را، نسبت به دو خط راست $x = 1$ و $y = -2$ و نسبت به نقطهٔ $(1, -2)$ به دست آوریم تا نمودار معادله (۱) به دست آید. این نمودار را در شکل ۵۹ می‌بینید.

عبارت‌های گویا و عبارت‌های گنگ

۴۶. در آغاز پیدایش مفهوم کسر (که می‌توان نمونه‌هایی از آن را در «پاپیروس‌های» مصری و کتیبه‌های باقی مانده در سرزمین «میان دو رود» پیدا کرد)، تنها از کسرهایی استفاده می‌کردند که صورتی برابر واحد داشته باشند: یک دوم (نصف)، یک سوم (ثلث)، یک چهارم (ربع) و غیره. و برای کسر $\frac{2}{3}$، می‌گفتند: یک سوم و یک سوم و برای کسر $\frac{4}{15}$ می‌گفتند: یک پانزدهم و یک پنجم، زیرا $\frac{4}{15} = \frac{1}{5} + \frac{1}{15}$.

$\frac{۵}{۶}$ از $\frac{۱}{۲}$ بزرگتر است:

$$\frac{۵}{۶} - \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۳}$$

بنابراین $\frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۲} = \frac{۵}{۶}$.

$\frac{۷}{۸}$ از $\frac{۱}{۲}$ بزرگتر است:

$$\frac{۷}{۸} - \frac{۱}{۲} = \frac{۳}{۸}$$

$\frac{۳}{۸}$ از $\frac{۱}{۴}$ بزرگتر است:

$$\frac{۳}{۸} - \frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۸}$$

بنابراین $\frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۲} = \frac{۷}{۸}$.

۴۷. ۱) a، b و c، هر عددی نمی‌توانند باشند. باید مخرج کسرها، مخالف صفر باشد. دامنهٔ متغیرها، با این شرط‌ها معین می‌شود:

$$b + c \neq ۰, b \neq ۰, c \neq ۰$$

پاسخ. $\frac{abc - d}{bc(b + c)}$.

۲) پاسخ. $\frac{x^۲ - y^۲}{۲y}(x + y \neq ۰, y \neq ۰)$.

۳) هریک از پرانتزها را به طور جداگانه محاسبه و، سپس، نتیجه‌ها را در هم ضرب می‌کنیم:

$$\frac{a - b}{a + b} - \frac{a^۳ - b^۳}{a^۳ + b^۳} = \frac{a - b}{a + b} - \frac{(a - b)(a^۲ + ab + b^۲)}{(a + b)(a^۲ - ab + b^۲)} =$$

$$= \frac{a-b}{a+b}\left(۱ - \frac{a^۲+ab+b^۲}{a^۲-ab+b^۲}\right) = \frac{a-b}{a+b} \times \frac{-۲ab}{a^۲-ab+b^۲} =$$

$$= -\frac{۲ab(a-b)}{(a+b)(a^۲-ab+b^۲)};$$

$$\frac{a-b}{a+b} + \frac{a^۲+b^۲}{a^۲-b^۲} = \frac{(a-b)^۲+a^۲+b^۲}{(a+b)(a-b)} =$$

$$= \frac{۲(a^۲-ab+b^۲)}{(a+b)(a-b)}$$

اکنون، اگر تمامی عبارت را A بنامیم:

$$A = \frac{-۲ab(a-b)}{(a+b)(a^۲-ab+b^۲)} \times \frac{۲(a^۲-ab+b^۲)}{(a+b)(a-b)} =$$

$$= -\frac{۴ab}{(a+b)^۲}(a \neq \pm b)$$

توجه کنید $a^۲-ab+b^۲$، به‌ازای همهٔ مقدارهای حقیقی a و b، با شرط $a \neq b$، مقداری مثبت است و نمی‌تواند برابر صفر شود، زیرا

$$a^۲-ab+b^۲ = \left(a-\frac{b}{۲}\right)^۲ + \frac{۳b^۲}{۴}$$

و این مقدار، تنها برای $a = \frac{b}{۲}$ و $b = ۰$، یعنی $a = b = ۰$، برابر صفر می‌شود که با شرط $a \neq b$ سازگار نیست.

به همین مناسبت، شرط وجود جواب را، بدون توجه به $a^۲-ab+b^۲$ و تنها با توجه به $a+b \neq ۰$ و $a-b \neq ۰$ نوشته‌ایم.

۴) برای کسر مرکب باید داشته باشیم:

$$n \neq ۰, n \neq -\frac{۱}{p}, m \neq -p$$

در این صورت، کسر مرکب، چنین می‌شود:

$$\frac{(m+۱)(np+۱)}{n(m+p)}=\frac{mnp+m+np+۱}{n(m+p)}$$

کسر دوم، که مخرج آن، حاصل ضرب دو عامل $m+۱$ و $np+۱$ است، شرط $m\neq -۱$ را، به شرط‌های ما اضافه می‌کند.

پاسخ. $\frac{۱}{m+p}$ ($n\neq ۰$، $m\neq -۱$، $np\neq -۱$، $m\neq -p$).

۵) پاسخ. ۰ (با شرط‌های $y\neq ۰$ و $y\neq ۱$).

۶) پاسخ. ۱ (با شرط‌های $x\neq \pm ۹$ و $x\neq -۳$).

۴۸. وقتی بخواهیم، برابریِ دو چندجمله‌ای، برای همهٔ مقدارهای x، برقرار باشد، به این معناست که باید، برابری، نسبت به x، یک اتحاد باشد؛ یعنی ضریب‌های جمله‌های متشابه در دو طرف برابری، با هم برابر باشند.

۱) اگر عمل ضرب پرانتزها را، در سمت راست برابری انجام دهیم، عبارت سمت راست برابری، به این صورت درمی‌آید:

$$x^۳+(b-۲)x^۲+(c-۲b)x+(a-۲c)$$

ضریب $x^۳$ در دو طرف برابری، یکی است. برای اتحاد بودن برابری، باید ضریب‌های $x^۲$، ضریب‌های x و مقدارهای ثابت، در دو طرف برابری، یکی باشند:

$$b-۲=۳, c-۲b=-۱, a-۲c=-۳$$

که از آن‌جا به دست می‌آید: $a=۱۵$، $b=۵$، $c=۹$.

۲) پاسخ. $a=۴$، $b=۳$، $c=-۹$.

۳) x برابر ۰ و ۱ و ۲ نمی‌تواند باشد. با توجه به این شرط‌ها، کسرهای سمت راست برابری را با هم جمع می‌کنیم:

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{x-۱}+\frac{c}{x-۲}=\frac{(a+b+c)x^۲-(۳a+۲b+c)x+۲a}{x(x-۱)(x-۲)}$$

چون مخرج کسرها، در دو طرف برابری، یکی هستند، باید صورت کسرها، در دو طرف برابری، با هم متحد باشند، یعنی داشته باشیم:

$$(a+b+c)x^{۲}-(۳a+۲b+c)x+۲a\equiv ۱$$

که از آن‌جا، به این دستگاه می‌رسیم:

$$a+b+c=۰, ۳a+۲b+c=۰, ۲a=۱$$

پاسخ. $a=\frac{۱}{۲}$، $b=-۱$، $c=\frac{۱}{۲}$ (با شرط‌های $x\neq ۰$، $x\neq ۱$ و $x\neq ۲$).

۴) پاسخ. $a=-\frac{۱}{۳}$، $b=\frac{۲}{۳}$، $c=\frac{۱}{۳}$ (با شرط $x\neq -۱$).

۵) پاسخ. $a=-۱$، $b=c=۱$ (با شرط $x\neq ۱$ و $x\neq -۲$).

۶) پاسخ. $a=\frac{۴}{۹}$، $b=\frac{۱۴}{۹}$ و $c=\frac{۷}{۳}$ ($x\neq -۱$ و $x\neq ۲$).

۴۹. ۱) پاسخ. $x_۱=\sqrt{۷}-۱$، $x_۲=-(\sqrt{۷}+۱)$.

۲) با شرط $x\neq ۱$، دو طرف برابری را در $x-۱$ ضرب می‌کنیم، بعد از ساده کردن، به این معادله می‌رسیم:

$$x^{۲}-۳x+۲=۰\Rightarrow x_۱=۱, x_۲=۲$$

ولی $x=۱$ با شرط $x\neq ۱$ سازگار نیست. تنها ریشهٔ معادله $x=۲$ است.

۳) با شرط $x\neq ۰$، $x\neq -۱$ و $x\neq -۲$، معادله را از مخرج‌ها آزاد می‌کنیم. بعد از ساده کردن، به معادلهٔ درجه سوم زیر می‌رسیم:

$$۷x^{۳}+۲۱x^{۲}-۴x-۲۴=۰ \qquad (*)$$

$x=۱$ در این معادله صدق می‌کند (جمع جبری ضریب‌ها، برابر صفر است) و این، به معنای آن است که سمت چپ معادلهٔ (*) قابل تجزیه است، به

نحوی که یکی از عامل‌های آن، برابر $x - ۱$ می‌شود. اگر عبارت درجه سوم سمت چپ معادله را بر $x - ۱$ تقسیم کنیم، عبارت خارج قسمت، برابر

$$۷x^۲ + ۲۸x + ۲۴$$

می‌شود و بنابراین، معادلهٔ درجه سوم (*) به صورت

$$(x - ۱)(۷x^۲ + ۲۸x + ۲۴) = ۰$$

درمی‌آید که قابل حل است.

پاسخ. $x_۱ = ۱$، $x_{۲,۳} = -۲ \pm \frac{۲\sqrt{۷}}{۷}$.

۴) دامنهٔ متغیر، مجموعهٔ همهٔ عددهای حقیقی است، زیرا هر سه مخرج، به‌ازای همهٔ مقدارهای حقیقی x، مقداری مثبت‌اند:

$$x^۲ - ۲x + ۲ = (x - ۱)^۲ + ۱;\ x^۲ - ۲x + ۳ = (x - ۱)^۲ + ۲;$$
$$x^۲ - ۲x + ۴ = (x - ۱)^۲ + ۳$$

برای حل معادله، فرض می‌کنیم: $x^۲ - ۲x + ۲ = y$؛ معادله به صورت

$$\frac{۱}{y} + \frac{۱}{y + ۱} = \frac{۱}{y + ۲}$$

درمی‌آید و، پس از آزاد کردن از مخرج‌ها، چنین می‌شود:

$$y^۲ + ۴y + ۲ = ۰ \Rightarrow y = -۲ \pm \sqrt{۲}$$

هر دو ریشهٔ y، عددهای منفی‌اند، در حالی که $y = x^۲ - ۲x + ۲$، باید مثبت باشد.

پاسخ. این معادله، ریشهٔ حقیقی ندارد.

۵) پیش از حل این تمرین، به نکته‌ای اشاره می‌کنیم که، اغلب، می‌تواند در حل برخی از معادله‌ها، سودمند باشد.

دوجمله‌ای‌های $x + ۳$ و $x + ۵$ را (که ضریب متغیر در آن‌ها با هم برابر است) در نظر بگیرید. اگر میانگین حسابی (یعنی نصف مجموع آن‌ها) را y بنامیم:

$$y = \frac{(x + ۳) + (x + ۵)}{۲} = x + ۴ \Rightarrow x = y - ۴$$

آن‌وقت دو عبارت $x + ۳$ و $x + ۵$، به صورت دو عبارت مزدوج $y - ۱$ و $y + ۱$ درمی‌آیند.

وقتی تعداد دوجمله‌ای‌ها، بیشتر از ۲ باشد، برای رسیدن به این هدف، باید تفاوت هر دو عبارت پشت سر هم، مقداری ثابت باشد. دوجمله‌ای‌های

$$x + ۱, x + ۴, x + ۷, x + ۱۰$$

را در نظر بگیرید. تفاوت هر دو عبارت پشت سر هم، برابر است با ۳. اکنون، اگر یک‌چهارم مجموع آن‌ها را (که میانگین حسابی این چهار عبارت نامیده می‌شود)، y بنامیم:

$$y = \frac{(x + ۱) + (x + ۴) + (x + ۷) + (x + ۱۰)}{۴} = x + \frac{۱۱}{۲}$$

یعنی $x = y - \frac{۱۱}{۲}$، آن وقت عبارت‌های ما به صورت

$$y - \frac{۹}{۲}, y - \frac{۳}{۲}, y + \frac{۳}{۲}, y + \frac{۹}{۲}$$

در می‌آیند که دو به دو مزدوج یکدیگرند.

به حل معادله می‌پردازیم.

تفاوت هر دو عبارت پشت سر هم، در مخرج‌ها، مقداری ثابت (و برابر ۱) است. روی هم، ۵ کسر داریم. یک‌پنجم مجموع مخرج‌ها را y می‌نامیم.

$$y = \frac{x + (x+۱) + (x+۲) + (x+۳) + (x+۴)}{۵} = x + ۲$$

یعنی $x = y - ۲$؛ به‌ازای این مقدار x، معادلهٔ مفروض، به صورت

$$\frac{۱}{y-۲} + \frac{۱}{y-۱} + \frac{۱}{y} + \frac{۱}{y+۱} + \frac{۱}{y+۲} = ۰$$

که در آن، اگر کسر وسط را ندیده بگیریم، بقیهٔ مخرج‌ها، دو به دو، مزدوج یکدیگرند. داریم:

$$\frac{۱}{y-۱} + \frac{۱}{y+۱} = \frac{۲y}{y^۲-۱};\ \frac{۱}{y-۲} + \frac{۱}{y+۲} = \frac{۲y}{y^۲-۴}$$

$$\frac{۲y}{y^۲-۱} + \frac{۲y}{y^۲-۴} = \frac{۲y(۲y^۲-۵)}{(y^۲-۱)(y^۲-۴)}$$

بنابراین، باید این معادله را حل کنیم:

$$\frac{۲y(۲y^۲-۵)}{(y^۲-۱)(y^۲-۴)} = -\frac{۱}{y} \Rightarrow ۲y^۲(۲y^۲-۵)+(y^۲-۱)(y^۲-۴) = ۰$$

که اگر $t = y^۲$ بگیریم، به معادلهٔ

$$۲t(۲t-۵) + (t-۱)(t-۴) = ۰$$

می‌رسیم که منجر به معادلهٔ درجه دوم زیر، برحسب t، می‌شود:

$$۵t^۲ - ۱۵t + ۴ = ۰ \Rightarrow t = \frac{۱۵ \pm \sqrt{۱۴۵}}{۱۰}$$

هر دو عددی که برای t بدست آمده، مثبت است، پس

$$y = \pm\sqrt{\frac{۱۵ \pm \sqrt{۱۴۵}}{۱۰}} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{۱۵ \pm \sqrt{۱۴۵}}{۱۰}} - ۲$$

و هر چهار جواب معادله قابل قبول‌اند، زیرا هیچ‌کدام از مخرج‌ها را، در معادلهٔ اصلی، صفر نمی‌کنند.

۶) $x = ۰$ در معادله صدق نمی‌کند، پس $x \neq ۰$. اگر صورت و مخرج هر یک از دو کسر را بر x تقسیم کنیم، به دست می‌آید:

$$\frac{۲}{۳x - ۱ + \frac{۲}{x}} - \frac{۷}{۳x + ۵ + \frac{۲}{x}} = -\frac{۱}{۵}$$

$۳x + \frac{۲}{x}$ را y می‌گیریم:

$$\frac{۲}{y - ۱} - \frac{۷}{y + ۵} = -\frac{۱}{۵} \Rightarrow y^۲ - ۲۱y + ۸۰ = ۰$$

این معادلهٔ درجه دوم دو ریشه دارد: $y_۱ = ۵$ و $y_۲ = ۱۶$. در نتیجه

$$۳x + \frac{۲}{x} = ۵ \Rightarrow ۳x^۲ - ۵x + ۲ = ۰$$

$$۳x + \frac{۲}{x} = ۱۶ \Rightarrow ۳x^۲ - ۱۶x + ۲ = ۰$$

پاسخ. $x_۱ = ۱$، $x_۲ = \frac{۲}{۳}$، $x_{۳,۴} = \frac{۸ \pm \sqrt{۵۸}}{۳}$.

۷) پیش از حل معادله، با تعریف عبارت‌های متجانس (یا همگن) آشنا شویم.

تعریف. *یک چندجمله‌ای شامل چند مجهول را، همگن گویند، وقتی که همهٔ جمله‌های آن، نسبت به این مجهول‌ها، از یک درجه باشند.* مثلاً، عبارت

$$2x^2 - 3xy - 5y^2$$

نسبت به x و y و یا عبارت

$$x^3 - 4x^2y + 3xyz - yz^2$$

نسبت به x و y و z، همگن‌اند، زیرا در اولی، همهٔ جمله‌ها (نسبت به x و y) از درجه دوم و، در عبارت دوم، همهٔ جمله‌ها (نسبت به x و y و z) از درجهٔ سوم‌اند.

وقتی با معادله‌ای که نسبت به دو مجهول خود همگن است، سروکار داشته باشیم، اگر از جواب بی‌معنی $(0, 0)$ صرف نظر کنیم، با تقسیم دو طرف معادله بر ضرب دو مجهول، می‌توان به معادله درجه دومی رسید و از آن‌جا نسبت دو مجهول را پیدا کرد. فرض کنید داشته باشیم:

$$2x^2 - 3xy - 5y^2 = 0 \qquad (*)$$

که معادله‌ای است درجه دوم و همگن، نسبت به x و y. اگر دو طرف معادله را بر xy تقسیم کنیم، به این معادله می‌رسیم:

$$\frac{2x}{y} - 3 - \frac{5y}{x} = 0$$

که با فرض $\frac{x}{y} = m$، معادلهٔ درجه دوم

$$2m - 3 - \frac{5}{m} = 0 \Rightarrow 2m^2 - 3m - 5 = 0$$

به دست می‌آید. ریشه‌های این معادله $m_1 = -1$ و $m_2 = \frac{5}{2}$ است، یعنی

$$\frac{x}{y} = -1 \text{ یا } \frac{x}{y} = \frac{5}{2} \qquad (**)$$

می‌توانستیم، در معادلهٔ (*) فرض کنیم $y = px$ که، در این صورت، به دست می‌آید:

$$2x^2 - 3x(px) - 5p^2x^2 = 0 \Rightarrow 5p^2 + 3p - 2 = 0$$

از آن‌جا به دست می‌آمد: $p_1 = -1$ و $p_2 = \frac{2}{5}$؛ یعنی

$$y = -x \text{ یا } y = \frac{2}{5}x$$

که همان جواب‌های (**) است.

اکنون به حل معادلهٔ (۴۹_۷) می‌پردازیم. معادله مفروض را، این طور می‌نویسیم:

$$5\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2 - 44\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2 + 12\left(\frac{x-2}{x+1}\right)\left(\frac{x+2}{x-1}\right) = 0$$

که اگر $u = \frac{x-2}{x+1}$ و $v = \frac{x+2}{x-1}$ بگیریم، به معادلهٔ درجه دوم و همگن زیر، نسبت به u و v می‌رسیم:

$$5u^2 - 44v^2 + 12uv = 0$$

فرض می‌کنیم $u = mv$، سرانجام به این معادلهٔ درجه دوم، نسبت به m، می‌رسیم:

$$5m^2 + 12m - 44 = 0 \Rightarrow m = 2, -\frac{22}{5}$$

m یعنی $\frac{u}{v}$؛ درضمن u و v بر حسب x معلوم‌اند. برای $m = ۲$ داریم

$$\frac{x-۲}{x+۱} : \frac{x+۲}{x-۱} = ۲ \Rightarrow x^۲ + ۹x + ۲ = ۰$$

از آن‌جا $x_۱ = \frac{-۹+\sqrt{۷۳}}{۲}$، $x_۲ = -\frac{۹+\sqrt{۷۳}}{۲}$.

به‌ازای $m = -\frac{۲۲}{۵}$، جوابی حقیقی برای x به دست نمی‌آید (آزمایش کنید!).

۸) سمت چپ برابری شامل دو جمله است که یکی مجذور x و دیگری مجذور $\frac{x}{x-۱}$ است. مجموع سمت چپ برابری را، به مجذور یک دوجمله‌ای تبدیل می‌کنیم:

$$x^۲ + \left(\frac{x}{x-۱}\right)^۲ = x^۲ + \left(\frac{x}{x-۱}\right)^۲ + \frac{۲x^۲}{x-۱} - \frac{۲x^۲}{x-۱} =$$
$$= \left(x + \frac{x}{x-۱}\right)^۲ - ۲ \times \frac{x^۲}{x-۱} = \left(\frac{x^۲}{x-۱}\right)^۲ - ۲ \times \frac{x^۲}{x-۱}$$

اکنون اگر فرض کنیم $y = \frac{x^۲}{x-۱}$، معادلهٔ مفروض به صورت

$$y^۲ - ۲y - ۸ = ۰$$

درمی‌آید که دو ریشه دارد: $y_۱ = ۴$، $y_۲ = -۲$. بنابراین، ریشه‌های معادلهٔ مفروض، مجموعهٔ ریشه‌های دو معادله زیر هستند:

$$\frac{x^۲}{x-۱} = ۴ \quad \text{و} \quad \frac{x^۲}{x-۱} = -۲$$

پاسخ. $x_۱ = x_۲ = ۲$، $x_۳ = -۱+\sqrt{۳}$، $x_۴ = -۱-\sqrt{۳}$.

۹) با استفاده از اتحاد $(a+b)^۲ = (a-b)^۲ + ۴ab$، عبارت سمت چپ برابری را تبدیل می‌کنیم:

$$(۱-۹x^۲)^۲ + ۳۶x^۲ - ۱۲x(۱-۹x^۲) = ۰$$

عبارت سمت چپ برابری اخیر، مجذور یک دوجمله‌ای است:

$$[(۱-۹x^۲) - ۶x]^۲ = ۰ \Rightarrow ۹x^۲ + ۶x - ۱ = ۰$$

پاسخ. معادله چهار ریشه دارد که، دو به دو، با هم برابرند.

$$x_۱ = x_۲ = \frac{\sqrt{۳}-۱}{۳},\ x_۳ = x_۴ = -\frac{\sqrt{۳}+۱}{۳}$$

۵۰. چندجمله‌ای زیر را، که نسبت به توان‌های نزولی x منظم شده است، در نظر می‌گیریم:

$$ax^n + bx^{n-۱} + \ldots + cx + d$$

روشن است، اگر $x = ۱$ فرض کنیم، به دست می‌آید:

$$x = ۱ \Rightarrow ax^n + bx^{n-۱} + \ldots + cx + d = a + b + \ldots + c + d$$

یعنی، با فرض $x = ۱$، مجموع جبری ضریب‌های عددی به دست می‌آید.

به همین ترتیب، اگر در چندجمله‌ای

$$A = ۱۵x^۳ - ۷x^۲y + ۳xy^۲ - ۴x + ۱۱y - ۱$$

قرار دهیم: $x = ۱$ و $y = ۱$، به دست می‌آید:

$$(x = ۱, y = ۱) \Rightarrow A = ۱۵ - ۷ + ۳ - ۴ + ۱۱ - ۱ = ۱۷$$

به این ترتیب، اگر بخواهیم، مجموع جبری ضریب‌های عددی یک چندجمله‌ای را به دست آوریم، کافی است، به جای متغیرهای آن، عدد ۱ را قرار دهیم.

۱) $x = ۱$ قرار می‌دهیم:

$$x = ۱ \Rightarrow M = (۱۴ + ۱۳ - ۲۵)^{۳} + (۵ - ۴ - ۲)^{۱۵} =$$
$$= ۲^{۳} + (-۱)^{۱۵} = ۸ - ۱ = ۷$$

۲) پاسخ. ۳۱.

۵۱. ۱) $y = ۲x + ۱$ می‌گیریم؛ در این صورت $x = \frac{۱}{۲}(y - ۱)$، یعنی

$$A = ۱۶\left[\frac{۱}{۲}(y-۱)\right]^{۴} - ۲۴\left[\frac{۱}{۲}(y-۱)\right]^{۳} + ۲۰\left[\frac{۱}{۲}(y-۱)\right]^{۲} -$$
$$-۲\left[\frac{۱}{۲}(y-۱)\right] + ۷ = (y-۱)^{۴} - ۳(y-۱)^{۳} + ۵(y-۱)^{۲} -$$
$$-(y-۱) + ۷ = (y^{۲} - ۲y + ۱)^{۲} - ۳(y^{۳} - ۳y^{۲} + ۳y - ۱) +$$
$$+۵(y^{۲} - ۲y + ۱) - (y - ۱) + ۷ =$$
$$= y^{۴} - ۷y^{۳} + ۲۰y^{۲} - ۲۴y + ۱۷ =$$
$$(۲x+۱)^{۴} - ۷(۲x+۱)^{۳} + ۲۰(۲x+۱)^{۲} - ۲۴(۲x+۱) + ۱۷$$

۲) پاسخ. $\frac{۱}{۸}(۲x+۱)^{۳} - \frac{۳}{۸}(۲x+۱)^{۲} + \frac{۷}{۸}(۲x+۱) - \frac{۱۳}{۸}$.

۳) پاسخ. $C = (۲x+۱)^{۳} - ۳(۲x+۱)^{۲} + ۷$.

۵۲. ۱) مخرج کسر، بعد از تجزیه، به صورت

$$(x + ۱)(y + z)$$

درمی‌آید که باید مخالف صفر باشد.

پاسخ. $\frac{y+۱}{y+z}$ ($x \neq -۱$ و $y+z \neq ۰$)؛

۲) پاسخ. $-\frac{۱}{(x+۱)^۲}$ ($x \neq ۰$ و $x \neq \pm ۱$)؛

۳) مخرج کسر تجزیه می‌شود:

$$x^۳+x^۲+x+۱ = x^۲(x+۱)+(x+۱) = (x+۱)(x^۲+۱)$$

و $x^۲+۱$، به‌ازای هر عدد حقیقی x مثبت است.

پاسخ. $\frac{x+۲}{(x+۱)(x^۲+۱)}$ ($x \neq -۱$)؛

۴) پاسخ. $\frac{a+b}{a-b}$ ($a \neq b$ و $c \neq -d$)؛

۵) پاسخ. $\frac{(a+b+c)^۲}{۲bc}$ (باشرط‌های $a \neq ۰$، $b \neq ۰$، $c \neq ۰$ و $a \neq b+c$)؛

۶) برای صورت کسر داریم:

$$\sqrt{(۲x+۱)^۲-۸x} = \sqrt{(۲x-۱)^۲} = |۲x-۱|$$

و برای مخرج کسر

$$۲\sqrt{x}-\frac{۱}{\sqrt{x}} = \frac{۲x-۱}{\sqrt{x}}$$

روشن است که $x > ۰$. حاصل عبارت، چنین می‌شود:

$$|۲x-۱| : \frac{۲x-۱}{\sqrt{x}} = \frac{|۲x-۱|\sqrt{x}}{۲x-۱}$$

این کسر وقتی معنی دارد که داشته باشیم $x \neq \frac{۱}{۲}$. حاصل عبارت را (که A می‌نامیم) در دو حالت پیدا می‌کنیم:

$$۰ < x < \frac{۱}{۲} \Rightarrow A = -\sqrt{x};$$

$$x > \frac{1}{2} \Rightarrow A = \sqrt{x}$$

دامنه متغیر $x > 0$ و $x \neq \frac{1}{2}$ است؛

۷) پاسخ. $y - x^2(y > 0)$؛

۸) روشن است که $x \geq 0$، $y \geq 0$ و $x \neq y$. داریم

$$\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \sqrt{x}+\sqrt{y},$$

$$\frac{x\sqrt{x}-\sqrt{y^3}}{x-y} = \frac{\sqrt{x^3}-\sqrt{y^3}}{x-y} = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(x+\sqrt{xy}+y)}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})} =$$

$$= \frac{x+\sqrt{xy}+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}},$$

پاسخ. $\sqrt{xy}$ ($x \geq 0$، $y \geq 0$ و $x \neq y$).

۹) برای این‌که بدانیم، متغیر x چه مقدارهایی را می‌تواند اختیار کند، یعنی دامنه متغیر را پیدا کنیم، باید مجموعهٔ جواب را در دستگاه شامل این نامعادله‌ها، به دست آوریم:

$$x - \sqrt{4(x-1)} \geq 0, x + \sqrt{4(x-1)} \geq 0,$$
$$x^2 - 4(x-1) > 0, x - 1 \neq 0$$

برای حقیقی بودن $\sqrt{4(x-1)}$ باید داشته باشیم $x > 1$. از نابرابری

$$x^2 - 4(x-1) > 0 \Rightarrow (x-2)^2 > 0$$

نتیجه می‌شود $x \neq 2$. چون

$$x - \sqrt{4(x-1)} = (x-1) - 2\sqrt{x-1} + 1 = (\sqrt{x-1}+1)^2 \geq 0,$$
$$x + \sqrt{4(x-1)} = (x-1) + 2\sqrt{x-1} + 1 = (\sqrt{x-1}+1)^2 \geq 0$$

بنابراین، دامنهٔ متغیر عبارت است از

$$۱ < x < ۲ \text{ و } x > ۲$$

اگر $۱ < x < ۲$، آن وقت

$$\sqrt{x-\sqrt{۴(x-۱)}} = |\sqrt{x-۱}-۱| = ۱-\sqrt{x-۱}$$

زیرا، برای $x < ۲$ داریم $\sqrt{x-۱} < ۱$؛ همچنین

$$\sqrt{x+\sqrt{۴(x-۱)}} = |\sqrt{x-۱}+۱| = \sqrt{x-۱}+۱,$$
$$\sqrt{x^۲-۴(x-۱)} = \sqrt{(x-۲)^۲} = |x-۲| = ۲-x,$$
$$۱-\frac{۱}{x-۱} = \frac{x-۲}{x-۱}$$

در نتیجه، حاصل‌ضرب مفروض، چنین می‌شود:

$$\frac{(۱-\sqrt{۱-x})+(۱+\sqrt{۱-x})}{-(x-۲)} \times \frac{x-۲}{x-۱} = \frac{۲}{۱-x};$$

اگر $x > ۲$، آن وقت

$$\sqrt{x-\sqrt{۴(x-۱)}} = \sqrt{x-۱}-۱, \sqrt{x+\sqrt{۴(x-۱)}} = \sqrt{x-۱}+۱,$$
$$\sqrt{x^۲-۴(x-۱)} = x-۲, ۱-\frac{۱}{x-۱} = \frac{x-۲}{x-۱}$$

که در نتیجه، حاصل عبارت، برابر $\frac{۲}{\sqrt{x-۱}}$ می‌شود.

پاسخ. اگر $۱ < x < ۲$، آن وقت حاصل عبارت برابر $\frac{۲}{۱-x}$ و، اگر $x > ۲$، آن وقت حاصل عبارت برابر $\frac{۲}{\sqrt{x-۱}}$ می‌شود و، به‌ازای سایر مقدارهای x، عبارت مفروض، معنا ندارد.

۵۳. ۱) پاسخ. $b - a$؛ ۲) پاسخ. $\frac{۲(\sqrt{a} - ۹)}{a - ۳۶}$ ($a > ۰$ و $a \neq ۳۶$)؛ ۳) بخش‌های عبارت را، به طور جداگانه، محاسبه می‌کنیم؛ با توجه به اتحاد

$$x + ۸ = (\sqrt[۳]{x} + ۲)(\sqrt[۳]{x^۲} - ۲\sqrt[۳]{x} + ۴)$$

مقدار پرانتز اول، چنین می‌شود:

$$\frac{x}{x+۸} - \frac{۴x}{(\sqrt[۳]{x}+۲)^۳} = \frac{x(\sqrt[۳]{x}+۲)^۲ - ۴x(\sqrt[۳]{x^۲} - ۲\sqrt[۳]{x} + ۴)}{(\sqrt[۳]{x}+۲)^۳(\sqrt[۳]{x^۲} - ۲\sqrt[۳]{x} + ۴)}$$

$$= \frac{x[(\sqrt[۳]{x^۲} + ۴\sqrt[۳]{x} + ۴) - ۴x(\sqrt[۳]{x^۲} - ۲\sqrt[۳]{x} + ۴)]}{(\sqrt[۳]{x}+۲)^۳(\sqrt[۳]{x^۲} - ۲\sqrt[۳]{x} + ۴)} =$$

$$= \frac{x(-۳\sqrt[۳]{x^۲} + ۱۲\sqrt[۳]{x} - ۱۲)}{(\sqrt[۳]{x}+۲)^۳(\sqrt[۳]{x^۲} - ۲\sqrt[۳]{x} + ۴)} =$$

$$= \frac{-۳x(\sqrt[۳]{x} - ۲)^۲}{(\sqrt[۳]{x}+۲)^۳(\sqrt[۳]{x^۲} - ۲\sqrt[۳]{x} + ۴)};$$

$$\left(\frac{۱ + ۲\sqrt[۳]{\frac{۱}{x}}}{۱ - ۲\sqrt[۳]{\frac{۱}{x}}}\right)^۲ = \frac{(\sqrt[۳]{x}+۲)^۲}{(\sqrt[۳]{x}-۲)^۲}$$

بنابراین، حاصل ضرب دو پرانتز، چنین می‌شود:

$$\frac{-۳x(\sqrt[۳]{x} - ۲)^۲}{(\sqrt[۳]{x}+۲)^۳(\sqrt[۳]{x^۲} - ۲\sqrt[۳]{x} + ۴)} \times \frac{(\sqrt[۳]{x}+۲)^۲}{(\sqrt[۳]{x}-۲)^۲} =$$

$$= \frac{-۳x}{(\sqrt[۳]{x}+۲)(\sqrt[۳]{x^۲} - ۲\sqrt[۳]{x} + ۴)} = \frac{-۳x}{x+۸}$$

و حاصل عبارت

$$\frac{-۳x}{x+۸}-\frac{۲۴}{x+۸}=-۳\times\frac{x+۸}{x+۸}=-۳$$

پاسخ. ۳−، با شرطهای $x \neq ۰$ و $x \neq \pm ۸$؛

۴) پاسخ. $۴x$، با شرط $x \neq ۱$ و $x > ۰$؛

۵) پاسخ. ۱− ($a > ۰$، $b > ۰$، $a \neq b$)

.۵۴

$$۱)\ \frac{۱}{\sqrt{۸}}=\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}=\frac{۱\times\sqrt{۲}}{۲\sqrt{۲}\times\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۴};$$

$$۲)\ \frac{۱۵}{\sqrt{۵۰}}=\frac{۱۵}{۵\sqrt{۲}}=\frac{۳}{\sqrt{۲}}=\frac{۳\sqrt{۲}}{۲};$$

$$۳)\ \frac{۶}{\sqrt[۳]{۲۴}}=\frac{۶}{۲\sqrt[۳]{۳}}=\frac{۳}{\sqrt[۳]{۳}}=\frac{۳\times\sqrt[۳]{۹}}{\sqrt[۳]{۳}\times\sqrt[۳]{۹}}=\sqrt[۳]{۹};$$

$$۴)\ \frac{۱}{۱+\sqrt{x}}=\frac{۱-\sqrt{x}}{۱-x}(x\neq ۱);$$

$$۵)\ \frac{۱}{\sqrt[۳]{۳}-\sqrt[۳]{۲}}=\frac{\sqrt[۳]{۹}+\sqrt[۳]{۶}+\sqrt[۳]{۴}}{۳-۲}=\sqrt[۳]{۹}+\sqrt[۳]{۶}+\sqrt[۳]{۴};$$

$$۶)\ \frac{۳}{\sqrt[۳]{۴۰}-\sqrt[۳]{۱۶}}=\frac{۳}{۲\sqrt[۳]{۵}-۲\sqrt[۳]{۲}}=\frac{۳}{۲(\sqrt[۳]{۵}-\sqrt[۳]{۲})}=$$

$$=\frac{۳(\sqrt[۳]{۲۵}+\sqrt[۳]{۱۰}+\sqrt[۳]{۴})}{۲(۵-۲)}=\frac{۱}{۲}(\sqrt[۳]{۲۵}+\sqrt[۳]{۱۰}+\sqrt[۳]{۴});$$

$$۷)\ \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^۳}+\sqrt{xy}}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+\sqrt{y})}=\frac{x-\sqrt{y}}{x^۲-y}$$

(با شرط $x > ۰$، $y > ۰$ و $x^۲ \neq y$)؛

۸) با شرط $x > 0$، $y > 0$ و $x \neq y$ داریم:

$$\frac{\sqrt{x}+\sqrt[4]{xy}+\sqrt{y}}{\sqrt[4]{x^3}-\sqrt[4]{y^3}} = \frac{\sqrt[4]{x^2}+\sqrt[4]{xy}+\sqrt[4]{y^2}}{(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y})(\sqrt[4]{x^2}+\sqrt[4]{xy}+\sqrt[4]{y^2})} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}} = \frac{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \frac{(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{x-y};$$

$$۹)\quad \sqrt[n]{\frac{y^3}{x^{2n-3}}} = \frac{\sqrt[n]{y^3}}{\sqrt[n]{x^{2n-3}}} = \frac{\sqrt[n]{x^3y^3}}{x^2}$$

وقتی n عددی فرد باشد با شرط $x \neq 0$ و وقتی n عدد زوج باشد با شرط $x > 0, y > 0$؛

$$(۱۰)\quad \sqrt[2n]{a : b^{2n-1}} = \frac{\sqrt[2n]{a}}{\sqrt[2n]{b^{2n-1}}} = \frac{\sqrt[2n]{ab}}{b}$$

این جواب، برای وقتی است که داشته باشیم $a > 0$ و $b > 0$.

در حالت $a < 0$ و $b < 0$، پاسخ را باید این طور به دست آورد:

$$\sqrt[2n]{a : b^{2n-1}} = \sqrt[2n]{(ab) : b^{2n}} = \frac{\sqrt[2n]{ab}}{|b|} =$$

$$= -\frac{\sqrt[2n]{ab}}{b}$$

درضمن، a و b نمی‌توانند علامت‌های مختلفی داتشه باشند؛

$$۱۱)\quad \frac{x+1}{x+\sqrt{x^2-x-1}} = x-\sqrt{x^2-x-1}$$

برای پیدا کردن دامنهٔ متغیر، چون صورت و مخرج کسر را بر $x+1$ تقسیم کردیم، پس $x \neq -1$؛ از طرف دیگر باید داشته باشیم:

$$x^2-x-1 \geq 0$$

ریشه‌های سه‌جمله‌ای سمت چپ نابرابری $\frac{۱}{۲}(۱ \pm \sqrt{۵})$ است، بنابراین نابرابری را می‌توان این طور نوشت:

$$\left(x - \frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}\right)\left(x + \frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}\right) \geq ۰$$

برای این‌که حاصل ضرب دو پرانتز مثبت باشد، باید هر دو پرانتز مثبت یا هر دو پرانتز منفی باشند:

$$\begin{cases} x - \frac{\sqrt{۵}+۱}{۲} \geq ۰ \\ x + \frac{\sqrt{۵}+۱}{۲} \geq ۰ \end{cases} \Rightarrow x \geq \frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}$$

$$\begin{cases} x - \frac{\sqrt{۵}+۱}{۲} \leq ۰ \\ x + \frac{\sqrt{۵}-۱}{۲} \leq ۰ \end{cases} \Rightarrow x \leq -\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}$$

پاسخ. $x - \sqrt{x^{۲} - x - ۱}$ (با شرطهای $x \geq \frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}$ و یا $x \leq \frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}$ و $x \neq -۱$ ،-۱؛

۱۲) به ترتیب داریم:

$$\frac{۱}{\sqrt[۳]{۳}+\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt[۳]{۳}-\sqrt{۲}}{\sqrt[۳]{۹}-۲} = \frac{(\sqrt[۳]{۳}-\sqrt{۲})(\sqrt[۳]{۸۱}+۲\sqrt[۳]{۹}+۴)}{۹-۸} =$$

$$= (\sqrt[۳]{۳}-\sqrt{۲})(۳\sqrt[۳]{۳}+۲\sqrt[۳]{۹}+۴)$$

۵۵. ۱) این معادله ریشه ندارد، زیرا به طور هم‌زمان، باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} ۶ - x \geq ۰ \\ ۲x - ۱۳ \geq ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq ۶ \\ x \geq ۶\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

x نمی‌تواند، از ۶ بزرگتر نباشد و، در عین حال، از $6\frac{1}{2}$ کوچکتر نباشد؛

۲) معادله ریشه‌ای ندارد (دو شرط $x \geq 5$ و $x \leq -1$ با هم سازگار نیستند)؛

۳) اگر دو طرف معادله را مجذور و، سپس، ساده کنیم، به دست می‌آید:

$$4x(x-4) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ یا } x = 4$$

$x = 0$ ریشهٔ معادله نیست، زیرا با وجودی که در دامنهٔ متغیر، یعنی $x \geq -\frac{9}{4}$ قرار داد، در معادله صدق نمی‌کند؛ ولی $x = 4$، هم در دامنهٔ متغیر قرار دارد و هم در معادله صدق می‌کند. معادله، یک ریشه دارد: $x = 4$؛

۴) *پاسخ.* معادله دو ریشه دارد: $x_1 = 0$ و $x_2 = 1$؛

۵) برای حقیقی بودن $\sqrt{x-1}$ باید داشته باشیم $x \geq 1$؛ همچنین، برای حقیقی بودن $\sqrt{1-x}$ به دست می‌آید $x \leq 1$. بنابراین باید $x = 1$ را در معادله آزمایش کنیم، غیر از $x = 1$ ریشهٔ دیگری نمی‌تواند داشته باشد.

پاسخ. $x = 1$؛

۶) *راهنمایی.* فرض کنید $y = 3x^2 - 2x + 4$.

پاسخ. $x_1 = 3$، $x_2 = -\frac{7}{3}$؛

۷) *پاسخ.* $x = \frac{9}{4}$؛

۸) با مجذور کردن دو طرف معادله، به دست می‌آید:

$$1 - \sqrt{x^4 - x^2} = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow 2x - x^2 = \sqrt{x^4 - x^2}$$

دوباره، دو طرف معادله را مجذور می‌کنیم:

$$4x^2 - 4x^3 + x^4 = x^4 - x^2 \Rightarrow 4x^3 - 5x^2 = 0$$

یا $x^{۲}(۴x - ۵) = ۰$ که از آن‌جا به دست می‌آید: $x = ۰$ یا $x = \frac{۵}{۴}$.
$x = ۰$ در معادله صدق نمی‌کند، ولی $x = \frac{۵}{۴}$ ریشهٔ معادله است.

۹) معادله را، به این صورت می‌نویسیم:

$$\sqrt{x - \sqrt{۱ - x}} = \sqrt{x} - ۱$$

که با مجذور کردن دو طرف آن، به دست می‌آید:

$$x - \sqrt{۱ - x} = x - ۲\sqrt{x} + ۱ \Rightarrow \sqrt{۱ - x} = ۲\sqrt{x} - ۱$$

دوباره، دو طرف معادلهٔ اخیر را مجذور می‌کنیم:

$$۱ - x = ۴x - ۴\sqrt{x} + ۱ \Rightarrow ۴\sqrt{x} = ۵x$$

که اگر یکبار دیگر، دو طرف معادلهٔ حاصل را مجذور کنیم، به معادلهٔ $۲۵x^{۲} = ۱۶x$ می‌رسیم که دو جواب دارد؛ $x_{۱} = ۰$ و $x_{۲} = \frac{۱۶}{۲۵}$.

با آزمایش، روشن می‌شود که $x = ۰$ ریشهٔ معادلهٔ مفروض نیست (به‌ازای $x = ۰$، به برابری نادرست $\sqrt{-۱} = ۱-$ می‌رسیم)؛ $x = \frac{۱۶}{۲۵}$ هم، در معادله صدق نمی‌کند (و ما را به برابری نادرست $۱ = \frac{۱}{۵} - \frac{۴}{۵}$ می‌رساند). معادلهٔ مورد نظر ما، ریشه‌ای ندارد.

۱۰) با توجه به اتحاد $(a + b)^{۳} = a^{۳} + b^{۳} + ۳ab(a + b)$، دو طرف معادله را به توان سه می‌رسانیم:

$$(a+\sqrt{x})+(a-\sqrt{x})+۳\sqrt[۳]{a^{۲} - x}(\sqrt[۳]{a + \sqrt{x}}+\sqrt[۳]{a - \sqrt{x}}) = b$$

بنا به معادلهٔ اصلی، به‌جای $\sqrt[۳]{a + \sqrt{x}} + \sqrt[۳]{a - \sqrt{x}}$، مقدارش $\sqrt[۳]{b}$ را می‌گذاریم و، سپس، به این صورت منظم می‌کنیم:

$$۳\sqrt[۳]{b(a^{۲} - x)} = b - ۲a$$

اگر یکبار دیگر، دو طرف برابری را به توان سه برسانیم، معادله از رادیکال آزاد می‌شود:

$$27b(a^2 - x) = (b - 2a)^3 \Rightarrow x = a^2 - \frac{(b-2a)^3}{27b}$$

این جواب به شرطی قابل قبول است که مقدار آن مثبت باشد.

۱۱) اگر فرض کنیم: $v = \sqrt[3]{a-x}, u = \sqrt[3]{a+x}$، سمت چپ معادله، به صورت $u^2 - uv + v^2$ درمی‌آید که، اگر در $u + v$ ضرب شود، حاصل ضرب، برابر $u^3 + v^3$ خواهد شد.

بنابراین، دو طرف برابری را در $\sqrt[3]{a-x} + \sqrt[3]{a+x}$ ضرب می‌کنیم، به دست می‌آید:

$$(\sqrt[3]{a+x})^3 + (\sqrt[3]{a-x})^3 = b(\sqrt[3]{a+x} + \sqrt[3]{a-x})$$

از آن‌جا $\frac{2a}{b} = \sqrt[3]{a+x} + \sqrt[3]{a-x}$. اگر دو طرف معادلهٔ اخیر را به توان سه برسانیم:

$$(a+x) + (a-x) + 3\sqrt[3]{a^2 - x^2}\left(\frac{b}{2a}\right) = \frac{8a^3}{b^3}$$

که پس از ساده کردن، به این معادله می‌رسیم:

$$\sqrt[3]{a^2 - x^2} = \frac{4a^2 - b^3}{3b^2}$$

از این‌جا، با مکعب کردن دو طرف برابری، مقدار x به دست می‌آید.

پاسخ. $x = \pm\sqrt{a^2 - \left(\frac{4a^2 - b^3}{3b^2}\right)^3}$.

۱۲) دو طرف معادله را مجذور می‌کنیم:

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{1-x^2}+\frac{2}{x\sqrt{1-x^2}}=\frac{1225}{144}$$

که می‌توان آن را به این صورت نوشت:

$$\frac{1}{x^2(1-x^2)}+2\times\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}-\frac{1225}{144}=0$$

اگر $\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}=y$ فرض کنیم، به این معادلهٔ درجه دوم می‌رسیم:

$$y^2+2y-\frac{1225}{144}=0\Rightarrow y_1=\frac{25}{12},y_2=-\frac{49}{12}$$

بنابراین، باید دو معادلهٔ زیر را حل کنیم:

$$(1)\ x\sqrt{1-x^2}=\frac{12}{25}\ \text{و}\ (2)\ x\sqrt{1-x^2}=-\frac{12}{49}$$

ابتدا معادلهٔ (۱) را حل می‌کنیم:

$$x\sqrt{1-x^2}=\frac{12}{25}\Rightarrow x^4-x^2+\frac{144}{625}=0$$

با فرض $u=x^2$، باید معادلهٔ $u^2-u+\frac{144}{625}=0$ را حل کنیم. این معادله دو جواب دارد: $u_1=\frac{16}{25}$ و $u_2=\frac{9}{25}$ پس

$$u=x^2=\frac{16}{25}\Rightarrow x=\frac{4}{5};\ u=x^2=\frac{9}{25}\Rightarrow x=\frac{3}{5}$$

در سمت چپ برابری باید x مثبت باشد (چون مقدار سمت راست، مثبت است)، یعنی $x>0$.

به حل معادلهٔ (۲) می‌پردازیم. با مجذور کردن دو طرف و با فرض $x^{۲} = v$، به این معادلهٔ درجه دوم می‌رسیم:

$$v^{۲} - v + \frac{۱۴۴}{۲۴۰۱} = ۰ \Rightarrow v = \frac{۴۹ \pm ۵\sqrt{۷۳}}{۹۸}$$

و بنابراین $x = -\sqrt{\frac{۴۹ \pm ۵\sqrt{۷۳}}{۹۸}}$. به این مناسبت، تنها جواب‌های منفی x را نوشتیم که از برابری $x\sqrt{۱ - x^{۲}} = -\frac{۱۲}{۴۹}$، روشن است که x باید مقداری منفی باشد. اگر رادیکال‌های مرکب را، به رادیکال‌های ساده تبدیل کنیم، به دست می‌آید:

$$x = -\frac{\sqrt{۷۳} \pm ۵}{۱۴}$$

به این ترتیب، چهار جواب برای معادله به دست می‌آید:

$$x_{۱} = \frac{۳}{۵}, x_{۲} = \frac{۴}{۵}, x_{۳} = -\frac{\sqrt{۷۳} + ۵}{۱۴}, x_{۴} = -\frac{\sqrt{۷۳} - ۵}{۱۴}$$

آزمایش روشن می‌کند که، این عددها، در معادله صدق می‌کنند.

۵۶. ۱) با شرط $a > ۰$ داریم:

$$\frac{a}{\sqrt[۴]{a}} = \frac{\sqrt[۴]{a^{۴}}}{\sqrt[۴]{a}} = \sqrt[۴]{a^{۳}};$$

$$\sqrt[۳]{\frac{a}{\sqrt[۴]{a}}} = \sqrt[۳]{\sqrt[۴]{a^{۳}}} = \sqrt[۱۲]{a^{۳}} = \sqrt[۴]{a}\ (a > ۰);$$

$$۲)\ \sqrt[۳]{۲\sqrt{۲}} + ۳\sqrt[۵]{۴\sqrt{۲}} = \sqrt[۳]{\sqrt{۲^{۳}}} + ۳\sqrt[۵]{\sqrt{۲^{۵}}} =$$

$$= \sqrt[۶]{۲^{۳}} + ۳\ \sqrt[۱۰]{۲^{۵}} = \sqrt{۲} + ۳\sqrt{۲} = ۴\sqrt{۲};$$

$$۳)\ \sqrt[۴]{\frac{a}{\sqrt[۵]{a}}} = \sqrt[۴]{\sqrt[۵]{a^۴}} = \sqrt[۲۰]{a^۴} = \sqrt[۵]{a}\ (a > ۰);$$

$$۴)\ \sqrt[۴]{\frac{a}{\sqrt[۳]{a}}} = \sqrt[۴]{\sqrt[۳]{a^۲}} = \sqrt[۱۲]{a^۲} = \sqrt[۶]{a}\ (a > ۰);$$

$$۵)\ \sqrt[۵]{\frac{a}{\sqrt[۶]{a}}} = \sqrt[۵]{\sqrt[۶]{a^۵}} = \sqrt[۶]{a}\ (a > ۰);$$

۶) باید از اتحاد زیر استفاده کنیم:

$$\sqrt{A+\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+K}{۲}} + \sqrt{\frac{A-K}{۲}}$$

که در آن $K = \sqrt{A^۲ - B}$. داریم

$$K = \sqrt{۹۴^۲ - ۸۸۲۰} = \sqrt{۸۸۳۶ - ۸۸۲۰} = \sqrt{۱۶} = ۴$$

از آن‌جا

$$\sqrt{۹۴ + \sqrt{۸۸۲۰}} = \sqrt{\frac{۹۴+۴}{۲}} + \sqrt{\frac{۹۴-۴}{۲}} =$$
$$= \sqrt{۴۹} + \sqrt{۴۵} = ۷ + ۳\sqrt{۵};$$

۷) $K = \sqrt{۴۹ - ۲۴} = ۵$. بنابراین

$$\sqrt{۷ - ۲\sqrt{۶}} = \sqrt{\frac{۷+۵}{۲}} - \sqrt{\frac{۷-۵}{۲}} = \sqrt{۶} - ۱;$$

۸) $K = \sqrt{۲۵^۲ - (۶\sqrt{۱۴})^۲} = ۱۱$. پس

$$\sqrt{۲۵ - ۶\sqrt{۱۴}} = \sqrt{\frac{۲۵+۱۱}{۲}} - \sqrt{\frac{۲۵-۱۱}{۲}} = ۳\sqrt{۲} - \sqrt{۷};$$

۹) $K = \sqrt{a^۲ - b(۲a - b)} = a - b$. از آن‌جا

$$\sqrt{a + \sqrt{b(۲a - b)}} = \sqrt{\frac{a + (a - b)}{۲}} + \sqrt{\frac{a - (a - b)}{۲}} =$$

$$= \sqrt{\frac{۲a - b}{۲}} + \sqrt{\frac{b}{۲}}$$

یادداشت. برای تبدیل رادیکال مرکب، در این‌جا $a > b$ گرفتیم و فرض کردیم:

$$\sqrt{a^۲ - ۲ab + b^۲} = \sqrt{(a - b)^۲} = a - b$$

با فرض $a < b$، یعنی $\sqrt{(a - b)^۲} = b - a$، به همان نتیجه می‌رسیدیم و جواب تغییری نمی‌کرد.

ولی برای تبدیل رادیکال مرکب $\sqrt{a - \sqrt{b(۲a - b)}}$ به رادیکال‌های ساده، باید دو حالت در نظر گرفت:

ـ اگر $a > b$، آن وقت:

$$\sqrt{a - \sqrt{b(۲a - b)}} = \sqrt{\frac{۲a - b}{۲}} - \sqrt{\frac{b}{۲}}$$

ـ اگر $a < b$، آن وقت

$$\sqrt{a - \sqrt{b(۲a - b)}} = \sqrt{\frac{b}{۲}} - \sqrt{\frac{۲a - b}{۲}}$$

و در هر حالت (ازجمله برای جواب تمرین ۹)، جواب به شرطی قابل قبول است که داشته باشیم: $b \geq ۰$ و $۲a \geq b$.

۵۷. رادیکال‌های مرکبی را، که به صورت

$$\sqrt[۳]{x + \sqrt{y}} \qquad (۱)$$

باشند، همیشه نمی‌توان به رادیکال‌های ساده تبدیل کرد، رادیکال مرکب (۱) را، به شرطی می‌توانیم به رادیکال‌های ساده تبدیل کنیم که بتوانیم به اتحاد

$$x+\sqrt{y}=(x'+m\sqrt{y})^{۳}$$

دست یابیم. به این ترتیب، مساله را به شرطی می‌توانیم حل کنیم که در برابری

$$\sqrt[۳]{۲۶+۱۵\sqrt{۳}}=a+b\sqrt{۳} \qquad (*)$$

a و b عددهایی درست (یا دست کم گویا) باشند.

با مکعب کردن دو طرف برابری $(*)$، به دست می‌آید:

$$۲۶+۱۵\sqrt{۳}=a^{۳}+۳a^{۲}b\sqrt{۳}+۹ab^{۲}+۳b^{۳}\sqrt{۳}=$$
$$(a^{۳}+۹ab^{۲})+۳b(a^{۲}+b^{۲})\sqrt{۳}$$

از آن‌جا، باید داشته باشیم:

$$a^{۳}+۹ab^{۲}=۲۶,\ b(a^{۲}+b^{۲})=۵ \qquad (*)$$

اگر a و b عددهایی درست باشند، در دومین معادله، باید یکی از این حالت‌ها را داشته باشیم:

$$\begin{cases} b=-۱ \\ a^{۲}+b^{۲}=-۵ \end{cases},\ \begin{cases} b=۱ \\ a^{۲}+b^{۲}=۵ \end{cases},\ \begin{cases} b=-۵ \\ a^{۲}+b^{۲}=-۱ \end{cases},$$
$$\begin{cases} b=۵ \\ a^{۲}+b^{۲}=۱ \end{cases}$$

دستگاه اول و سوم، به جواب نمی‌رسند، زیرا $a^{۲}+b^{۲}$ نمی‌تواند منفی باشد؛ دستگاه‌چهارم هم منجر به $a^{۲}=-۲۴$ می‌شود که، برای عدد حقیقی

a، ممکن نیست. ولی از دستگاه دوم به دست می‌آید: $b = ۱$ و $a = \pm ۲$.
مقدارهای a و b، باید در معادلهٔ اول دستگاه (*) صدق کنند که تنها $a = ۲$
و $b = ۱$ در آن صدق می‌کند. بنابراین

$$\sqrt[۳]{۲۶ + ۱۵\sqrt{۳}} = ۲ + \sqrt{۳}$$

۵۸. ۱) پاسخ. اگر $a \neq ۰$ و $b \neq ۰$، آن وقت

$$x_۱ = \frac{a + \sqrt{a^۲ + ۴b^۲}}{۴b},\ x_۲ = \frac{a - \sqrt{a^۲ + ۴b^۲}}{۴b}$$

اگر $a \neq ۰$ و $b = ۰$، آن وقت $x = ۰$؛
اگر $a = ۰$ و $b \neq ۰$، معادله ریشه‌ای ندارد؛
اگر $a = b = ۰$، هر عدد حقیقی، به‌جز $x = \pm\frac{۱}{۲}$، ریشهٔ معادله است؛

۲) پاسخ. $x_۱ = ۸$، $x_۲ = -\frac{۸}{۳}$؛

۳) پاسخ. $x_۱ = \frac{۲۱ + \sqrt{۲۴۱}}{۲۰}$، $x_۲ = \frac{۲۱ - \sqrt{۲۴۱}}{۲۰}$؛

۴) در صورت هر کسر، عبارت مجذور کامل را جدا می‌کنیم:

$$\frac{(x + ۱)^۲ + ۱}{x + ۱} + \frac{(x + ۴)^۲ + ۴}{x + ۴} = \frac{(x + ۲)^۲ + ۲}{x + ۲} + \frac{(x + ۳)^۲ + ۳}{x + ۳}$$

سپس، در هر کسر، دو جملهٔ صورت را، به طور جداگانه، بر مخرج تقسیم می‌کنیم:

$$x + ۱ + \frac{۱}{x + ۱} + x + ۴ + \frac{۴}{x + ۴} = x + ۲ + \frac{۲}{x + ۲} + x + ۳ + \frac{۳}{x + ۳}$$

که بعد از ساده کردن، به این معادله می‌رسیم:

$$\frac{۱}{x + ۱} + \frac{۴}{x + ۴} = \frac{۲}{x + ۲} + \frac{۳}{x + ۳}$$

و اگر آن را، از مخرج‌ها آزاد کنیم، معادلهٔ درجه دوم زیر به دست می‌آید:

$$4x^2 + 10x = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -\frac{5}{2}$$

۵) دو طرف برابری را در $x^2(a^2 - ax + x^2)$ ضرب می‌کنیم:

$$x^4 + ax^3 + a^3x - a^4 = 0$$

عبارت سمت چپ برابری، به سادگی تجزیه می‌شود:

$$x^4 + ax^3 + a^3x - a^4 = (x^4 - a^4) + ax(x^2 + a^2) =$$
$$= (x^2 + a^2)(x^2 + ax - a^2)$$

پاسخ. با شرط $a \neq 0$: $x = \dfrac{-a \pm a\sqrt{5}}{2}$؛ در حالت $a = 0$ معادلهٔ اصلی، منجر به برابری $1 = 0$ می‌شود، یعنی معادله جواب ندارد.

۶) دو طرف معادله را بر ۳ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{16}{x^2} = \frac{10}{3}\left(\frac{x}{3} - \frac{4}{x}\right)$$

که آن را می‌توان این طور نوشت:

$$\left(\frac{x}{3} - \frac{4}{x}\right)^2 + \frac{8}{3} = \frac{10}{3}\left(\frac{x}{3} - \frac{4}{x}\right)$$

اکنون اگر فرض کنیم: $y = \dfrac{x}{3} - \dfrac{4}{x}$، به معادله‌ای درجه دوم نسبت به y، تبدیل می‌شود.

پاسخ. $x_1 = -2$، $x_2 = 6$، $x_3 = 3 - \sqrt{21}$، $x_4 = 3 + \sqrt{21}$؛

۷) پاسخ. $x = 5$؛

۸) پاسخ. $x = \frac{۹}{۴}$؛

۹) پاسخ. $x_۱ = ۲$، $x_۲ = ۳$.

۵۹. ۱) فرض می‌کنیم: $z = \sqrt{x+y}$ و $t = \sqrt{۲x+y+۲}$. در این صورت $x + y = z^۲$ و $۲x + y + ۲ = t^۲$، در نتیجه

$$z^۲ + t^۲ = ۳x + ۲y + ۲$$

ولی، با توجه به معادلهٔ دوم دستگاه $۳x + ۲y = ۲۳$، بنابراین، به این دستگاه می‌رسیم:

$$\begin{cases} t + z = ۷ \\ t^۲ + z^۲ = ۲۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t + z = ۷ \\ (t+z)^۲ - ۲tz = ۲۵ \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} t + z = ۷ \\ tz = ۱۲ \end{cases}$$

یعنی t و z، ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم زیر هستند:

$$u^۲ - ۷u + ۱۲ = ۰ \Rightarrow \left| \begin{array}{l} t = ۳ \\ z = ۴ \end{array} \right. \text{ یا } \left| \begin{array}{l} t = ۴ \\ z = ۳ \end{array} \right.$$

به این ترتیب، باید جواب‌های این دو دستگاه را به دست آوریم:

$$\begin{cases} ۲x + y = ۱۴ \\ x + y = ۹ \end{cases} , \begin{cases} ۲x + y = ۷ \\ x + y = ۱۶ \end{cases}$$

پاسخ. $(x = ۵, y = ۴)$ یا $(x = -۹, y = ۲۵)$؛

۲) دستگاه را، به این صورت می‌نویسیم:

$$\begin{cases} \sqrt{xy} - (\sqrt{x} - \sqrt{y}) = ۱ \\ \sqrt{xy}(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = ۲ \end{cases}$$

و فرض می‌کنیم: $\sqrt{xy}=t$ و $\sqrt{x}-\sqrt{y}=z$ در این صورت

$$\begin{cases} t-z=1 \\ tz=2 \end{cases} \Rightarrow \left| \begin{matrix} t=2 \\ z=1 \end{matrix} \right. \text{ یا } \left| \begin{matrix} t=-1 \\ z=-2 \end{matrix} \right.$$

در نتیجه، باید این دو دستگاه را حل کنیم:

$$\begin{cases} \sqrt{xy}=2 \\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=1 \end{cases} \text{ و } \begin{cases} \sqrt{xy}=-1 \\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=-2 \end{cases}$$

$\sqrt{xy}$ نمی‌تواند منفی باشد، بنابراین، دستگاه دوم جواب ندارد. برای حل دستگاه اول، دو طرف معادلهٔ دوم آن را مجذور می‌کنیم:

$$x+y-2\sqrt{xy}=1$$

که اگر به‌جای $\sqrt{xy}$، مقدارش ۲ را قرار می‌دهیم، سرانجام، به این دستگاه می‌رسیم:

$$\begin{cases} x+y=5 \\ xy=4 \end{cases} \Rightarrow \left| \begin{matrix} x=4 \\ y=1 \end{matrix} \right. \text{ یا } \left| \begin{matrix} x=1 \\ y=4 \end{matrix} \right.$$

جواب $(x=1, y=4)$ در معادلهٔ اصلی صدق نمی‌کند؛ بنابراین، دستگاه تنها یک جواب دارد: $x=4$ و $y=1$؛

۳) دو طرف معادلهٔ اول را در $\sqrt{xy}$ ضرب می‌کنیم و در عبارت سمت چپ معادلهٔ دوم، از $\sqrt{xy}$ فاکتور می‌گیریم:

$$\begin{cases} x+y=7+\sqrt{xy} \\ \sqrt{xy}(x+y)=78 \end{cases}$$

که با فرض $x+y=z$ و $\sqrt{xy}=t$ به دست می‌آید:

$$\begin{cases} z-t=7 \\ zt=78 \end{cases} \Rightarrow \left| \begin{matrix} z=13 \\ t=6 \end{matrix} \right. \text{ یا } \left| \begin{matrix} z=-6 \\ t=-13 \end{matrix} \right.$$

$t = \sqrt{xy}$ نمی‌تواند منفی باشد، بنابراین جواب دوم را باید کنار گذاشت:

$$\begin{cases} z = x + y = ۱۳ \\ t = \sqrt{xy} = ۶ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = ۱۳ \\ xy = ۳۶ \end{cases}$$

پاسخ. $x = ۴$، $y = ۹$ یا $x = ۹$، $y = ۴$.

۴) دو طرف معادلهٔ اول را مجذور می‌کنیم:

$$x^۲ + y^۲ + ۲\sqrt{x^۴ - y^۴} + x^۲ - y^۲ = ۴y^۲$$

که با استفاده از معادلهٔ دوم دستگاه، به این صورت درمی‌آید:

$$x^۲ + a^۲ = ۲y^۲$$

از این معادله، $x^۲$ را (بر حسب a و y) محاسبه می‌کنیم و در معادلهٔ دوم دستگاه قرار می‌دهیم

$$(۲y^۲ - a^۲)^۲ - y^۴ = a^۴ \Rightarrow ۳y^۴ - ۴a^۲y^۲ = ۰$$

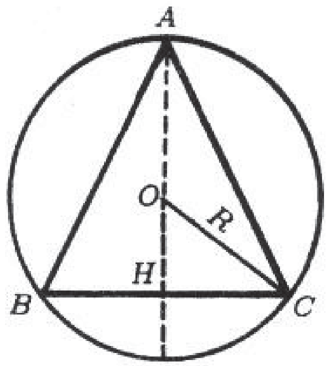
از آن‌جا $y_۱ = y_۲ = ۰$ و $y_{۳,۴} = \pm\frac{۲a}{\sqrt{۳}}$

به‌ازای $y = ۰$، برای x عدد حقیقی به دست نمی‌آید.

پاسخ. جواب‌های دستگاه، چنین‌اند:

$$\left| \begin{array}{l} x_۱ = a\sqrt{\frac{۵}{۳}} \\ y_۱ = \frac{۲a}{\sqrt{۳}} \end{array} \right. ; \quad \left| \begin{array}{l} x_۲ = a\sqrt{\frac{۵}{۳}} \\ y_۲ = -\frac{۲a}{\sqrt{۳}} \end{array} \right. ; \quad \left| \begin{array}{l} x_۳ = -a\sqrt{\frac{۵}{۳}} \\ y_۳ = \frac{۲a}{\sqrt{۳}} \end{array} \right. ;$$

$$\left| \begin{array}{l} x_۴ = -a\sqrt{\frac{۵}{۳}} \\ y_۴ = -\frac{۲a}{\sqrt{۳}} \end{array} \right.$$



شکل ۶۰

مفهوم تابع

۶۰. ۱) مجموعهٔ زوج‌های مرتب A، یک تابع وارون‌پذیر است، زیرا دو مجموعهٔ

$$X = \{-۱, ۲, \sqrt{۲}\} \text{ و } Y = \{۲, ۵, ۳\}$$

در تناظر یک به یک قرار دارند؛

۲) تابع وارون‌پذیر است؛

۳) تابع است، ولی وارون‌پذیر نیست، زیرا $y = ۱$، متناظر با دو مقدار مختلف $x = -۵$ و $x = ۱$ است.

۶۱. اگر صفحه‌ای را از ارتفاع مخروط بگذرانیم، در مقطع، شبیه شکل ۶۰ به دست می‌آید که در آن، BC قطر قاعدهٔ مخروط، AH ارتفاع مخروط و OC شعاع کره است.

$|HC|$، یعنی شعاع قاعدهٔ مخروط را r فرض می‌کنیم، در این صورت

$$x^۲ = R^۲ - (x-R)^۲ = x(۲R - x)$$

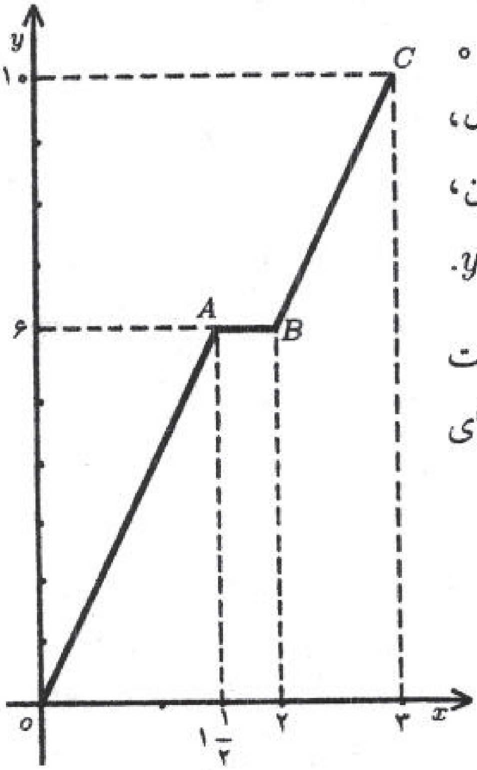
حجم مخروط، برابر است با یک‌سوم حاصل ضرب مساحت قاعده در ارتفاع

مخروط؛ بنابراین، به دست می‌آید:

$$y = \frac{۱}{۳}\pi r^۲ x = \frac{۱}{۳}\pi x^۲(۲R - x)$$

و این، یک تابع است (که البته، وارون‌پذیر نیست)؛ درضمن

$۰ < x < ۲R$



شکل ۶۱

۶۲. بهرام در یک ساعت و نیم اول، ساعتی ۴ کیلومتر پیموده است. بنابراین، اگر $۰ \leq x \leq \frac{۳}{۲}$، آن وقت $y = ۴x$.

چون $۶ = ۴ \times \frac{۳}{۲}$ و چون نیم ساعت به استراحت گذشته است، بنابراین برای $\frac{۳}{۲} < x \leq ۲$ داریم $y = ۶$.

در یک ساعت آخر، یعنی برای $۲ < x \leq ۳$، به اندازه $۴(x - ۲)$ کیلومتر دیگر و، درنتیجه، روی هم به اندازهٔ

$۶ + ۴(x - ۲) = ۴x - ۲$ کیلومتر

راه‌پیمایی کرده است. به این ترتیب

$$y = \begin{cases} ۴x & \left(۰ \leq x \leq \frac{۳}{۲}\right) \\ ۶ & \left(\frac{۳}{۲} < x \leq ۲\right) \\ ۴x - ۲ & (۲ < x \leq ۳) \end{cases}$$

نمودار تابع، در شکل ۶۱ داده است. این نمودار شامل سه پاره‌خط راست OA، AB و BC است که، در آن

$$O(۰, ۰),\ A\left(\frac{۳}{۲}, ۶\right),\ B(۲, ۶),\ C(۳, ۱۰)$$

۶۳. ۱) برابری را می‌توان به صورت $y = x - |x|$ و یا

$$y = \begin{cases} ۲x & (x \leq ۰) \\ ۰ & (x > ۰) \end{cases}$$

نوشت. این برابری معرف یک تابع است (شکل ۶۲، ۱).

۲) این برابری به‌ازای $x \geq ۱$ معنا دارد و

$$x \geq ۱ \Rightarrow y = \pm(x - ۱)$$

نمودار این رابطه در شکل ۶۲، ۲ داده است. این رابطه، تابع نیست؛

۳) تابع نیست (شکل ۶۲ ، ۳ را ببینید)؛

۴) تابع و وارون‌پذیر است (نمودار را در شکل ۶۲، ۴ ببینید)؛

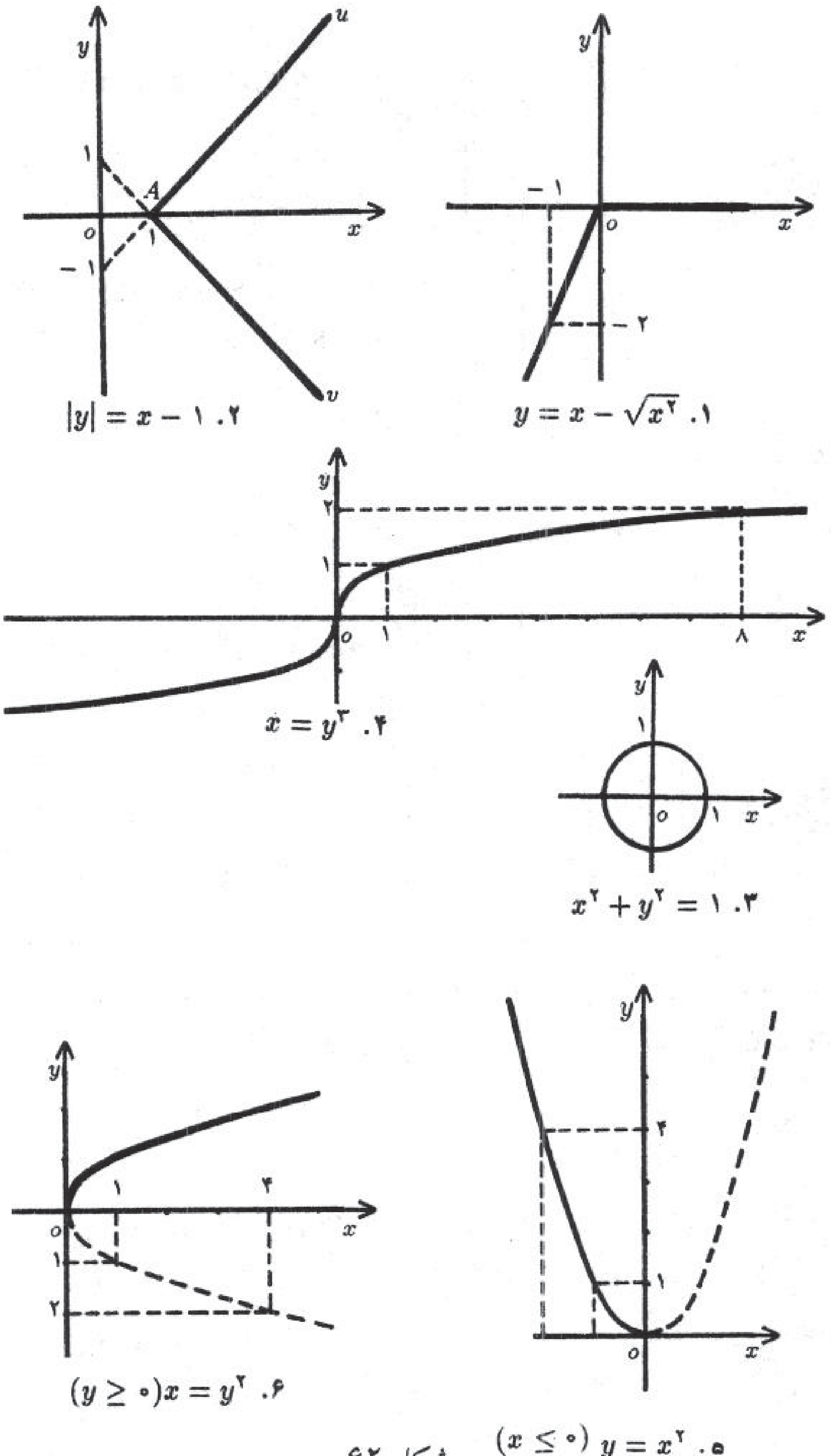
۵) تابع و وارون‌پذیر است (شکل ۶۲، ۵)؛

۶) تابع و وارون‌پذیر است (شکل ۶۲، ۶).

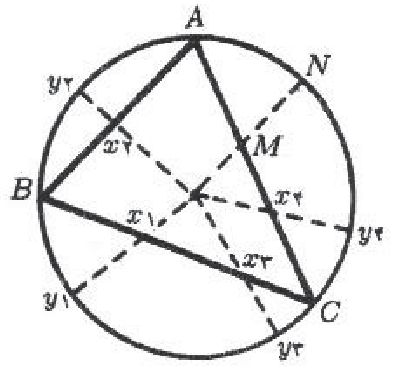
۶۴. الف) *پاسخ*. بله، مجموعهٔ زوج‌های مرتب (x, y) مُعرف یک تابع و تابعی وارون‌پذیر است، زیرا دو مجموعهٔ X و Y در تناظر یک به یک هستند (شکل ۶۳).

البته این، به شرطی است که، از، O به نقطه‌ای مثل M از محیط مثلث وصل کنیم، نیم‌خط راست OM را از جهت O به M ادامه دهیم تا نقطهٔ متناظر آن (N) روی محیط دایره به دست آید.

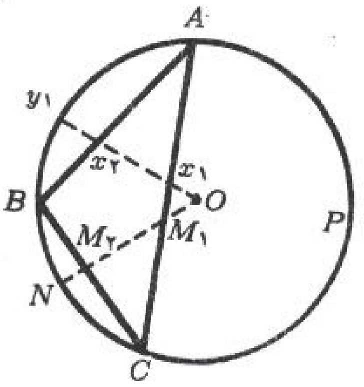
ب) هر دو نقطهٔ $M_۱$ و $M_۲$ از محیط مثلث، متناظر با یک نقطهٔ N از محیط دایره است و، اگر مثل حالت الف، نیم‌خط راست OM را در جهت از O به M در نظر بگیریم، روی شکل ۶۴، هر نقطهٔ بخش $\overset{\frown}{APC}$ از محیط دایره، متناظر با نقطه‌ای از محیط مثلث نیست. بین نقطه‌های محیط مثلث و نقطه‌های واقع بر کمان ABC، رابطهٔ تابعی برقرار است، ولی این تابع وارون‌پذیر نیست.



شکل ۶۲



شکل ۶۳



شکل ۶۴

۶۵. *پاسخ‌ها.* الف) تابع است، ولی وارون‌پذیر نیست:

$$y = \begin{cases} -x & (-۱ \leq x < ۰) \\ x & (۰ \leq x \leq ۲) \end{cases}$$

که می‌توان، آن را به صورت

$$y = |x|(-۱ \leq x \leq ۲)$$

یا به صورت $(-۱ \leq x \leq ۲) y = \sqrt{x^۲}$ نوشت؛

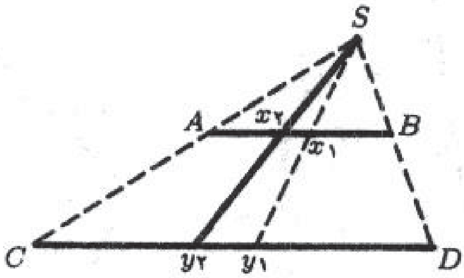
ب) تابع و وارون‌پذیر است:

$$y = x(-۲ \leq x \leq ۱)$$

ج) تابع نیست:

$$|y| = x(-۱ \leq y \leq ۲)$$

۶۶. نیم‌خط راست CA، در نقطه‌ای مثل S، نیم‌خط راست DB را قطع می‌کند. اکنون اگر از S به نقطه‌ای از پاره‌خط راست AB (مثل نقطهٔ $x_۱$) وصل کنیم و ادامه دهیم، پاره‌خط راست CD را در نقطه‌ای مثل $y_۱$،



شکل ۶۵

که متناظر با x_1 است، قطع می‌کند. همچنین هر نقطهٔ دلخواهی مثل y_2، از پاره‌خط راست CD، متناظر با نقطه‌ای مثل x_2 از پاره‌خط راست AB است (شکل ۶۵). در این تناظر A و C نقطه‌های متناظر یکدیگر و B و D هم نقطه‌های متناظر یکدیگرند. درضمن، این عمل را، تصویر AB بر CD به مرکز S گویند (تصویر مرکزی AB بر CD به مرکز نقطهٔ S).

۶۷. تابع‌های ۲) و ۳)، در واقع یکی هستند، ولی تابع ۱) با آن‌ها فرق دارد. نمودار تابع ۱)، خط راست $y = x - ۱$ است، به‌جز نقطهٔ $(۰, -۱)$، در حالی که نمودار تابع‌های ۲) یا ۳)، تمامی خط راست $y = x - ۱$ است.

دامنهٔ تابع در ۱) عبارت است از $x \neq ۰$ و در ۲) و ۳): $x \in \mathbf{R}$.

۶۸. $f(x)$ را می‌توان، به این ترتیب، تبدیل کرد:

$$\frac{x^۳ + ۲x - ۴}{x^۲ + x + ۱} = \frac{x(x^۲ + x + ۱) - (x^۲ + x + ۱) + ۲x - ۳}{x^۲ + x + ۱} =$$

$$= x - ۱ + \frac{۲x - ۳}{x^۲ + x + ۱}$$

$x > ۰$ می‌گیریم، در این صورت $۲x > ۲x - ۳$، یعنی

$$\frac{۲x - ۳}{x^۲ + x + ۱} < \frac{۲x}{x^۲ + x + ۱}$$

(اگر صورت کسر بزرگ شود، مقدار کسر بزرگ می‌شود). همچنین برای $x > ۰$

$$x^۲ + x + ۱ > x^۲ \Rightarrow \frac{۲x}{x^۲ + x + ۱} < \frac{۲x}{x^۲} = \frac{۲}{x}$$

(وقتی مخرج کسر کوچک شود، مقدار کسر بزرگ می‌شود). از طرف دیگر

$$\frac{۲}{x} = \frac{۲}{۳۴۵۴۷۶/۳۱۴} < \frac{۲}{۱۰۰۰۰۰۰} = ۰/۰۰۰۰۰۲$$

یعنی $\frac{۲}{x}$ از دو ملیونیوم و، در نتیجه، از یک صدهزارم کوچکتر است؛ یعنی می‌توان از آن صرف‌نظر کرد و

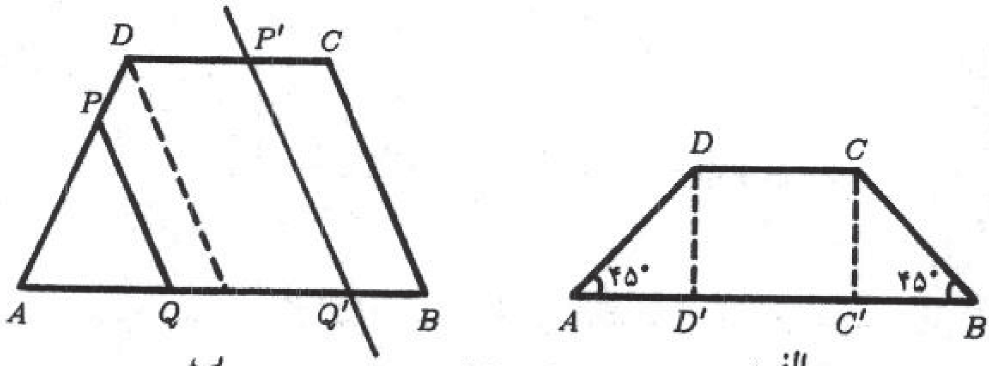
$$f(x) \approx x - ۱ = ۳۴۵۴۷۵/۳۱۴$$

۶۹. اگر از راس‌های C و D، عمودهایی بر قاعدهٔ AB رسم کنیم، با توجه به مثلث‌های قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین $DD'A$ و $CC'B$ روشن می‌شود که $|DC| = ۴$ (شکل ۶۶، الف). وقتی $۰ \leq x \leq ۲$، آن وقت، مقدار y عبارت است از مساحت مثلث AQP (شکل ۶۶ ب). قاعدهٔ این مثلث به طول x و ارتفاع آن، به طول $\frac{۱}{۲}x$ است (چرا؟)؛ بنابراین

$$۰ \leq x \leq ۲ \Rightarrow y = \frac{۱}{۴}x^۲$$

وقتی $۲ \leq x \leq ۶$، آن وقت، مساحت چهارضلعی $ADP'Q'$ برابر است با مساحت ذوزنقهٔ $ABCD$، به شرطی که مساحت متوازی‌الاضلاع $BCP'Q'$ را از آن کم کنیم. داریم:

$$S_{ABCD} = \frac{۱}{۲}(۶ + ۴) \times ۱ = ۵;\ S_{BCP'Q'} = (۶ - x) \times ۱$$



ب الف

شکل ۶۶

بنابراین در حالت $۶ \le x \le ۲$ داریم:

$$y = ۵ - (۶ - x) = x - ۱$$

تابع مورد نظر چنین است:

$$y = \begin{cases} \frac{۱}{۴}x^{۲} & (۰ \le x \le ۲) \\ x - ۱ & (۲ \le x \le ۶) \end{cases}$$

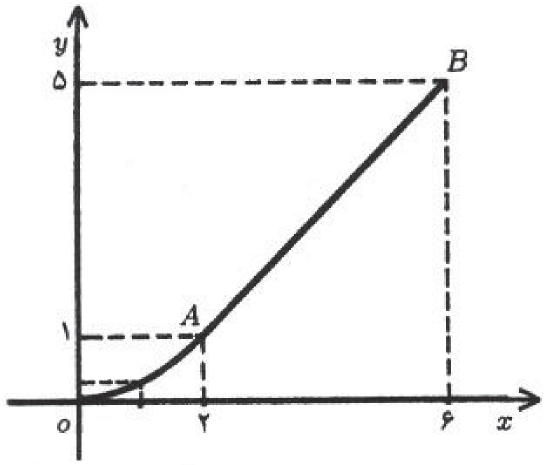
نمودار، تابع در شکل ۶۷ داده شده است و شامل قطه منحنی OA و پاره‌خط راست AB است.

۷۰. پاسخ. تابع $g(x)$ زوج و تابع $\varphi(x)$ فرد است.

۷۱. ۱) زوج؛ ۲) فرد؛ ۳) زوج؛ ۴) زوج؛ ۵) نه زوج و نه فرد، زیرا $f(-x)$، برابر $f(x)$ یا $-f(x)$ نیست؛ ۶) فرد.

۷۲. پاسخ را در شکل ۶۸ می‌بینید.

$$y = \begin{cases} ۵۵ + ۵x & (۰ \le x < ۵) \\ ۸۰ & (۵ \le x < ۹) \\ ۸۰ + ۵x & (۹ \le x \le ۱۱) \end{cases}$$



شکل ۶۷

۷۳. ۱) $f(۲) = \frac{۲}{۳}$؛ ۲) $f(-۲) = -۲$؛ ۳) $f(۰) = ۰$؛ ۴) $f\left(-\frac{۳}{۴}\right) = ۳$؛

$$۵)\ f(x^۲) = \frac{|x^۲|}{x^۲+۱} = \frac{x^۲}{x^۲+۱};$$

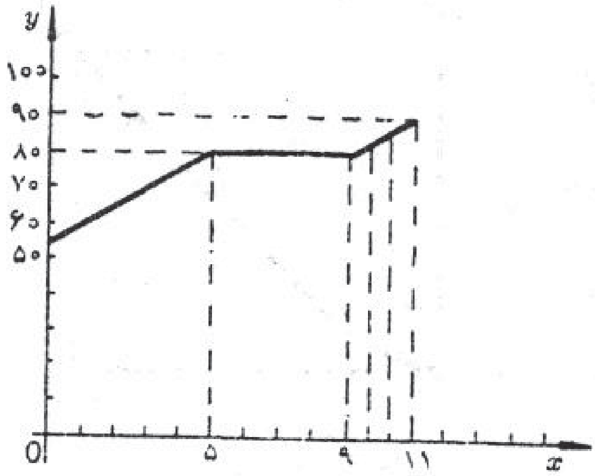
$$۶)\ f(-x) = \frac{|-x|}{-x+۱} = \frac{|x|}{۱-x};$$

$$۷)\ f(|x|) = \frac{||x||}{|x|+۱} = \frac{|x|}{|x|+۱};$$

$$۸)\ f(۳x) = \frac{|۳x|}{۳x+۱} = \frac{۳|x|}{۳x+۱} = \frac{|x|}{x+\frac{۱}{۳}};$$

$$۹)\ f(x^۲+۱) = \frac{|x^۲+۱|}{(x^۲+۱)+۱} = \frac{x^۲+۱}{x^۲+۲};$$

$$۱۰)\ f(x^۲-۱) = \frac{|x^۲-۱|}{(x^۲-۱)+۱} = \frac{|x^۲-۱|}{x^۲};$$



شکل ۶۸

$$۱۱)\ f\left(\frac{۱}{x}\right)=\frac{\left|\frac{۱}{x}\right|}{\frac{۱}{x}+۱}=\frac{x}{|x|(x+۱)}=$$

$$=\begin{cases}\frac{۱}{x+۱} & (x>۰)\\ -\frac{۱}{x+۱} & (x<۰)\end{cases}$$

$$۱۲)\ f(f(x))=\frac{|f(x)|}{f(x)+۱}=\frac{\frac{|x|}{|x+۱|}}{\frac{|x|}{x+۱}+۱}=$$

$$=\begin{cases}x & (x<-۱)\\ -x & (-۱<x\leq ۰)\\ \frac{x}{۲x+۱} & (x>۰)\end{cases}$$

۷۴. پیش از حل مساله، به نکتهٔ مهم از جبر چندجمله‌ای‌ها اشاره می‌کنیم. می‌دانید معادلهٔ درجه اول (معادله خطی) تنها یک ریشه دارد و

معادلهٔ درجه دوم، حداکثر، دو ریشهٔ متفاوت حقیقی دارد. این قانون کلی است، یعنی هر معادلهٔ درجه n، حداکثر دارای n ریشهٔ حقیقی است.

این قانون را، به نحو دیگری هم می‌توان بیان کرد:

اگر $f(x)$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ n باشد ($n \in \mathbf{N}$)، حداکثر n عدد حقیقی می‌توان پیدا کرد که، به‌ازای آن‌ها، یک مقدار برای $f(x)$ به دست آید. فرض کنید:

$$f(x) = ۲x^۳ - x^۲ - ۲x + ۵$$

برای این چندجمله‌ای داریم:

$$f(-۱) = f\left(\frac{۱}{۲}\right) = f(۱) = ۴$$

ولی هر عدد حقیقی دیگری به‌جای x قرار دهیم، حاصل $f(x)$، عددی غیر از ۴ خواهد شد و یا

$$f(۰) = f\left(\frac{۱+\sqrt{۱۷}}{۴}\right) = f\left(\frac{۱-\sqrt{۱۷}}{۴}\right) = ۵$$

و برای عددهای حقیقی دیگر: $f(x) \neq ۵$، در همین $f(x)$ داریم:

$$f(-۳) = -۵۲$$

ولی نمی‌توان عدد حقیقی دیگری برای x پیدا کرد که، به‌ازای آن، $f(x)$ برابر ۵۲− شود.

از این نکته می‌توان این نتیجه را گرفت: اگر چندجمله‌ای $f(x)$، به‌ازای بی‌نهایت مقدار حقیقی x، برابر با یک عدد شود، به معنای آن است که $f(x)$، مقداری ثابت است، زیرا $f(x) = c$، به‌ازای هر مقدار x، برابر c می‌شود.

اکنون به حل مسالهٔ ۷۴ می‌پردازیم.

روشن است، برابری $f(x^۲ - x + ۱) = g(x^۲ + x + ۱)$ را، با تبدیل x به $-x$ می‌توان به برابری $f(x^۲ + x + ۱) = g(x^۲ - x + ۱)$ تبدیل کرد. به طور کلی، اگر A را یک چندجمله‌ای بگیریم و بدانیم:

$$f(A^۲ - A + ۱) = g(A^۲ + A + ۱)$$

می‌توان، از آن نتیجه گرفت:

$$f(A^۲ + A + ۱) = g(A^۲ - A + ۱)$$

و برعکس، به ترتیب، داریم:

$$f(x^۲ - x + ۱) = g(x^۲ + x + ۱) =$$
$$= g((x + ۱)^۲ - (x + ۱) + ۱) = f((x + ۱)^۲ + (x + ۱) + ۱) =$$
$$= f(x^۲ + ۳x + ۳)$$

اگر در برابری $f(x^۲ - x + ۱) = f(x^۲ + ۳x + ۳)$، فرض کنیم $x = ۱$، به دست می‌آید:

$$f(۱) = f(۷) \qquad (۱)$$

دوباره $f(x^۲ + ۳x + ۳)$ را تبدیل می‌کنیم:

$$f(x^۲ + ۳x + ۳) = f((x + ۲)^۲ - (x + ۲) + ۱) =$$
$$g((x + ۲)^۲ + (x + ۲) + ۱) = g(x^۲ + ۵x + ۷) =$$
$$= f(x^۲ - ۵x + ۷)$$

و چون $f(x^۲ - ۵x + ۷)$ به‌ازای $x = ۱$ به صورت $f(۳)$ درمی‌آید، برابری (۱)، برای $f(x)$، چنین می‌شود:

$$f(۱) = f(۷) = f(۳) \qquad (۲)$$

همین روش را ادامه می‌دهیم:

$$f(x^2 - 5x + 7) = g(x^2 + 5x + 7) =$$
$$= g((x+3)^2 - (x+3) + 1) = f((x+3)^2 + (x+3) + 1) =$$
$$= f(x^2 + 7x + 13)$$

و بنابراین، برای چندجمله‌ای $f(x)$ به دست می‌آید:

$$f(1) = f(7) = f(3) = f(21) = \dots \qquad (3)$$

چند نقطه‌ای که در انتهای راست برابری‌های (۳) قرار داده‌ایم، به این معناست که با ادامهٔ این روش، به بی‌نهایت برابری می‌رسیم، یعنی چندجمله‌ای $f(x)$ به‌ازای بی‌نهایت مقدار x، برابر با یک عدد حقیقی می‌شود: $f(x)$ مقداری ثابت است. با همین روش، ثابت بودن $g(x)$ هم روشن می‌شود (خودتان، برابری‌های (۳) را، تا دو جملهٔ دیگر ادامه دهید).

۷۵. داریم:

$$f(f(x)) = (x^2 - 3x + 1)(x^2 - 3x + 1 - 3) + 1 =$$
$$= (x^2 - 3x + 1)^2 - 3(x^2 - 2x + 1) + 1$$

و دیگر روشن است که

$$f(x) = x^2 - 3x + 1$$

۷۶. فرض می‌کنیم: $\frac{x}{x+2} = t$. در این صورت $x = \frac{2t}{1-t}$. این مقدار x را در $f\left(\frac{x}{x+2}\right) = x^2 - x$ قرار می‌دهیم:

$$f(t) = \left(\frac{2t}{1-t}\right)^2 - \frac{2t}{1-t} = \frac{6t^2 - 2t}{(t-1)^2}$$

که اگر در آن، t را به x تبدیل کنیم، $f(x)$ به دست می‌آید:

$$f(x) = \frac{۲x(۳x - ۱)}{(x - ۱)^۲}$$

۷۷. تابع خطی را $f(x) = ax + b$ می‌گیریم. بنا به فرض:

$$f(-۱) = -a + b = ۲;\ f(۰) = b = ۵$$

در نتیجه $a = ۳$ و $b = ۵$.

پاسخ. $f(x) = ۳x + ۵$.

۷۸. چون داریم $a^۳ + b^۳ = (a + b)^۳ - ۳ab(a + b)$ (اتحاد را در نظر بگیرید):

$$x^۳ + \frac{۱}{x^۳} = \left(x + \frac{۱}{x}\right)^۳ - ۳\left(x + \frac{۱}{x}\right)$$

بنابراین $f(x) = x^۳ - ۳x$.

۷۹. کافی است هریک از دو طرف برابری را محاسبه کنیم.

۸۰. $t = x - ۱$ می‌گیریم؛ در این صورت $-t = ۱ - x$ و $x = t + ۱$ و برابری فرض به این صورت درمی‌آید:

$$۲f(t) + f(-t) = ۳t + ۳ \qquad (۱)$$

اگر در دو طرف برابری (۱)، t را به $-t$ تبدیل کنیم، به این برابری می‌رسیم:

$$۲f(-t) + f(t) = -۳t + ۳ \qquad (۲)$$

برابری‌های (۱) و (۲)، با هم، دستگاهی شامل دو معادله‌اند که مجهول‌های آن‌ها، $f(t)$ و $f(-t)$ است:

$$\begin{cases} ۲f(t) + f(-t) = ۳t + ۳ \\ f(t) + ۲f(-t) = -۳t + ۳ \end{cases}$$

که اگر معادلهٔ دوم این دستگاه را، از دو برابر معادلهٔ اول کم کنیم، به دست می‌آید: $f(t) = ۳t + ۱$ و با تبدیل t به x،

$$f(x) = ۳x + ۱$$

۸۱. $x = ۲$ در معادلهٔ $f(x) = f(۲)$ صدق می‌کند و بنابراین، $x = ۲$ یکی از ریشه‌های معادلهٔ $f(x) = f(۲)$ است. به طور کلی معادلهٔ $f(x) = f(m)$ دارای ریشه $x = m$ است. درضمن، لازم نیست، $f(x)$ چندجمله‌ای باشد.

مثال. *به فرض این‌که $f(x) = ۴x^۳ - ۱۲x^۲ + ۱۱x + ۵$، معادلهٔ $f(x) = f\left(\frac{۳}{۲}\right)$ را حل کنید.*

حل. $f(x) = f\left(\frac{۳}{۲}\right)$، به ترتیب به این صورت درمی‌آید:

$$۴x^۳ - ۱۲x^۲ + ۱۱x + ۵ = ۴\left(\frac{۳}{۲}\right)^۳ -$$

$$-۱۲\left(\frac{۳}{۲}\right)^۲ + ۱۱\left(\frac{۳}{۲}\right) + ۵;$$

$$۴\left(x^۳ - \frac{۲۷}{۸}\right) - ۱۲\left(x^۲ - \frac{۹}{۴}\right) + ۱۱\left(x - \frac{۳}{۲}\right) = ۰;$$

$$۴\left(x - \frac{۳}{۲}\right)\left(x^۲ + \frac{۳}{۲}x + \frac{۹}{۴}\right) -$$

$$-۱۲\left(x - \frac{۳}{۲}\right)\left(x + \frac{۳}{۲}\right) + ۱۱\left(x - \frac{۳}{۲}\right) = ۰;$$

$$\left(x - \frac{۳}{۲}\right)\left[۴\left(x^۲ + \frac{۳}{۲}x + \frac{۹}{۴}\right) - ۱۲\left(x + \frac{۳}{۲}\right) + ۱۱\right] = ۰$$

$$\left(x - \frac{۳}{۲}\right)(۴x^۲ - ۶x + ۲) = ۰;$$

$$(۲x - ۳)(۲x^۲ - ۳x + ۱) = ۰$$

که از آن‌جا، سه ریشه معادله به دست می‌آید که، یکی از آن‌ها، همان $x = \frac{۳}{۲}$ است؛

$$x_۱ = \frac{۳}{۲}, x_۲ = ۱, x_۳ = \frac{۱}{۲}$$

۸۲. برای $x > ۰$ داریم:

$$\frac{\sqrt{x^۲ + y^۲}}{x} = \sqrt{\frac{x^۲ + y^۲}{x^۲}} = \sqrt{۱ + \left(\frac{y}{x}\right)^۲}$$

بنابراین $f\left(\frac{y}{x}\right) = \sqrt{۱ + \left(\frac{y}{x}\right)^۲}$ که، با تبدیل $\frac{y}{x}$ به x، به دست می‌آید:

$$f(x) = \sqrt{۱ + x^۲}$$

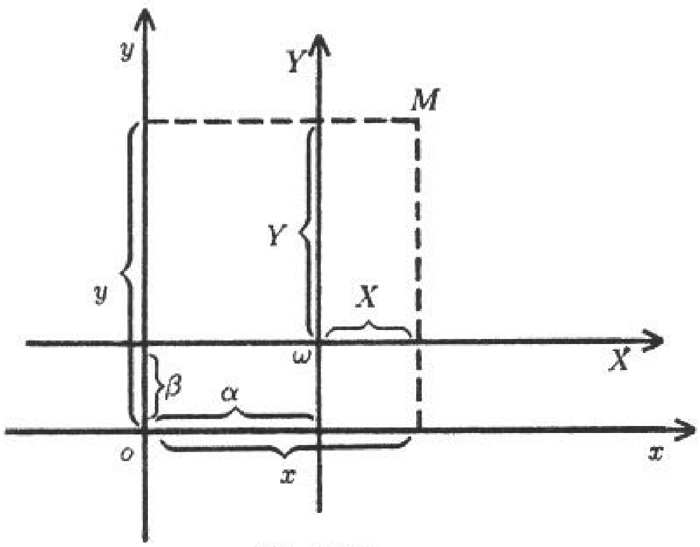
۸۳. *راهنمایی.* در دو طرف برابری x را به $-x$ تبدیل کنید؛ معادله‌ای را که به دست می‌آید، همراه با معادلهٔ فرض، به صورت دستگاهی شامل دو مجهول $f(۲ + x)$ و $f(۲ - x)$ بنویسید و $f(۲ + x)$ را از آن به دست آورید. دنبالهٔ حل ساده است.

پاسخ. $f(x) = ۵x + ۷$.

۸۴. برای حل مساله‌های ۸۴ و ۸۵، به مقدمه‌ای نیاز داریم.

نقطهٔ $M(x, y)$ را در صفحهٔ محورهای مختصات xoy در نظر می‌گیریم. فرض کنید، دستگاه محورهای مختصات XwY در همین صفحه، با شرط‌های $X'X$ موازی $x'x$، $Y'Y$ موازی $y'y$ و $\omega(\alpha, \beta)$ داده شده باشد. اگر مختصات M را در دستگاه تازه $X\omega Y$ برابر (X, Y) فرض کنیم، با توجه به شکل ۶۹ روشن است که

$$\left|\begin{array}{l} X = x - \alpha \\ Y = y - \beta \end{array}\right. \quad \text{یا} \quad \left|\begin{array}{l} x = X + \alpha \\ y = Y + \beta \end{array}\right. \qquad (*)$$



شکل ۶۹

این رابطه‌ها را، **دستورهای انتقال محورهای مختصات** گویند. در ریاضیات، *انتقال یک شکل، به معنای جابه‌جایی شکل است، به شرطی که موازی با خودش جابه‌جا شده باشد.* انتقال محورهای مختصات، یعنی جابه‌جا کردن آن‌ها، موازی با خود: $X'X$ موازی $x'x$ و هم‌جهت با آن و $Y'Y$ موازی با $y'y$ و هم جهت با آن است.

در شکل ۶۹، حالت خاصی از نقطهٔ M و محورها را در نظر گرفته‌ایم (نقطهٔ M و مبداء تازه ω، در ربع اول xoy قرار دارند). شما می‌توانید، حالت‌های مختلف شکل را رسم کنید و ببینید، دستورهای $(*)$، برای هر حالتی از شکل درست‌اند. دو مثال می‌آوریم.

مثال ۱. *نقطهٔ $M(-۳, ۵)$ در دستگاه محورهای xoy داده شده است. اگر محورهای مختصات را، موازی و هم جهت با خود، طوری جابه‌جا کنیم که، مبداء تازه، روی نقطهٔ $\omega(۲, -۳)$ قرار گیرد، مختصات نقطهٔ M را در دستگاه محورهای مختصات تازه پیدا کنید.*

حل. اگر مختصات M را، در دستگاه محورهای جدید، (X, Y)

بنامیم، با توجه به دستورهای $(*)$، به دست می‌آید:

$$\left| \begin{array}{l} X = -۳ - ۲ = -۵ \\ Y = ۵ + ۳ = ۸ \end{array} \right. \Rightarrow M \left| \begin{array}{l} -۵ \\ ۸ \end{array} \right.$$

مختصات نقطهٔ M، در دستگاه محورهای مختصات تازه، $(-۵, ۸)$ است.

مثال ۲. *اگر دستگاه محورهای مختصات xoy را موازی و هم‌جهت با خود منتقل کنیم تا مبداء تازه بر نقطهٔ $\omega(-۳, -۳)$ قرار گیرد، تابع $y = x^۲ + ۶x + ۶$، در دستگاه محورهای مختصات تازه، به چه صورتی درمی‌آید؟*

حل. مختصات نقطهٔ دلخواهی از نمودار را، در دستگاه محورهای تازه، (X, Y) و در دستگاه نخستین (x, y) می‌گیریم. بنابراین، با توجه به دستورهای $(*)$، باید داشته باشیم:

$$x = X - ۳,\ y = Y - ۳$$

که اگر در معادلهٔ $y = x^۲ + ۶x + ۶$ قرار دهیم:

$$Y - ۳ = (X - ۳)^۲ + ۶(X - ۳) + ۶;$$
$$Y = (X^۲ - ۶x + ۹) + (۶X - ۱۸) + ۶ + ۳;$$
$$Y = X^۲$$

معادلهٔ تابع، در دستگاه تازهٔ محورهای مختصات، به صورت $Y = X^۲$ درمی‌آید که تابعی زوج است و، بنابراین، خط راست $X = ۰$، محور تقارن آن است. چون $X = x + ۳$، پس در دستگاه محورهای مختصات نخستین، خط راست $x + ۳ = ۰$ یا $x = -۳$ (که خط راستی موازی $y'y$ است)، محور تقارن نمودار تابع مفروض است.

اکنون به حل مسالهٔ ۸۴ می‌پردازیم.

تابع $y = x^۲ - ۲x$، نه زوج است و نه فرد. فرض می‌کنیم خط راست $x = \alpha$ محور تقارن آن باشد. اگر محورها را موازی و هم‌جهت با خود طوری جابه‌جا کنیم که، مبداء تازه، بر نقطهٔ $\omega(\alpha, ۰)$ قرار گیرد، آن وقت اگر $x = \alpha$ (در دستگاه نخستین) محور تقارن نمودار تابع باشد، باید در دستگاه جدید، خط راست $X = ۰$ محور تقارن آن باشد، یعنی بتوان α را طوری پیدا کنید که، به ازای آن، معادلهٔ جدید نمودار، به صورت تابعی زوج درآید. داریم:

$$\left| \begin{array}{l} x = X + \alpha \\ y = Y + \beta \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x = X + \alpha \\ y = Y \end{array} \right.$$

که اگر در معادلهٔ $y = x^۲ - ۲x$ قرار دهیم

$$Y = (X + \alpha)^۲ - ۲(X + \alpha) = X^۲ + ۲(\alpha - ۱)X + \alpha^۲ - ۲\alpha$$

و برای این‌که با تابعی زوج سروکار داشته باشیم، باید ضریب x برابر صفر شود: $\alpha - ۱ = ۰$ یا $\alpha = ۱$.

پاسخ. خط راست $x = ۱$، محور تقارن نمودار تابع مفروض است.

۸۵. *راهنمایی.* $\omega(\alpha, \beta)$ را مرکز تقارن نمودار تابع فرض کنید؛ مبداء مختصات را به نقطهٔ ω منتقل و معادلهٔ جدید تابع را به دست آورید. باید α و β را طوری پیدا کرد که معادلهٔ جدید تابع، به صورت تابعی فرد درآید، یعنی با تبدیل x به $-x$ و y به $-y$، معادلهٔ نمودار تغییر نکند.

پاسخ. ۱) $\omega(۱, -۲)$؛ ۲) $\omega(-۱, ۱)$.

دایره و سهمی

۸۶. *پاسخ‌ها.*

$$۱)\ (x - ۴)^۲ + (y + ۷)^۲ = ۲۵;$$

یا $x^۲ + y^۲ - ۸x + ۱۴y + ۴۰ = ۰;$

$۲)\ (x+۶)^۲ + (y-۳)^۲ = ۲;$

یا $x^۲ + y^۲ + ۱۲x - ۶y + ۴۳ = ۰;$

$۳)\ x^۲ + (y+۲)^۲ = \frac{۱}{۴}$ یا $۴x^۲ + ۴y^۲ + ۱۶y + ۱۵ = ۰;$

$۴)\ (x+۱)^۲ + y^۲ = ۳$ یا $x^۲ + y^۲ + ۲x - ۲ = ۰$

۸۷. اگر فاصلهٔ نقطه‌ای تا مرکز دایره کوچکتر از طول شعاع دایره باشد، نقطه در درون دایره است. در حالتی که این فاصله با شعاع دایره برابر باشد، با نقطه‌ای واقع بر محیط دایره سروکار داریم و، سرانجام، اگر فاصلهٔ نقطه تا مرکز دایره، بزرگتر از طول شعاع دایره باشد، نقطهٔ مفروض در بیرون دایره است.

دایرهٔ مفروض، شعاعی برابر ۵ دارد و مختصات مرکز آن $\omega(۲,۳)$ است. داریم:

$$|A\omega| = \sqrt{(۲+۱)^۲ + (۳+۱)^۲} = \sqrt{۹+۱۶} = \sqrt{۲۵} = ۵$$

بنابراین $R = |A\omega|$ و نقطهٔ A، روی محیط دایره است؛

$|B\omega| = ۶$؛ نقطهٔ B در بیرون دایره است؛

$|C\omega| = \sqrt{۲۹}$، نقطهٔ C بیرون دایره است؛

$|D\omega| = \sqrt{۲۰} = ۲\sqrt{۵}$ و $۲\sqrt{۵} < ۵$؛ D در درون دایره است؛

نقطهٔ E روی محیط دایره است؛ نقطهٔ F روی محیط دایره است؛ G در درون دایره است.

۸۸. شعاع دایره، برابر است با طول پاره‌خط راست ωO (O، مبداء مختصات است)، یعنی

$$R = \sqrt{۱۴۴ + ۲۵} = \sqrt{۱۶۹} = ۱۳$$

پاسخ. $(x-۱۲)^۲+(y+۵)^۲=۱۶۹$.

۸۹. وسط پاره‌خط راست $M_۱M_۲$، مرکز دایره است: $\omega(-۱,-۲)$.
درضمن، طول شعاع دایره، برابر است با نصف طول پاره‌خط راست $M_۱M_۲$:

$$R=\frac{۱}{۲}|M_۱M_۲|=\frac{۱}{۲}\sqrt{(۲+۴)^۲+(-۷-۳)^۲}=$$
$$=\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۳۶}=\sqrt{۳۴}$$

پاسخ. $(x+۱)^۲+(y+۲)^۲=۳۴$.

۹۰. خط راست مفروض، محور $x'x$ را در نقطهٔ $\left(-\frac{۱}{۲},۰\right)$ و محور $y'y$ را در نقطهٔ $\left(۰,-\frac{۶}{۵}\right)$ قطع می‌کند؛ و این دو نقطه، دو سر قطر دایره‌اند.

پاسخ. مرکز دایرهٔ $\omega\left(-\frac{۱}{۴},-\frac{۳}{۵}\right)$ و شعاع آن به طول $R=\frac{۱۳}{۲۰}$:

$$۲۵(۴x+۱)^۲+۱۶(۵y+۳)^۲=۱۶۹$$

۹۱. *راهنمایی*. اگر دایره، محور $y'y$ را در $A(۰,-۱)$ قطع می‌کند، چون AO بر $x'x$ عمود و دایره بر $x'x$ در نقطهٔ O مماس است، پاره‌خط راست OA قطر دایره می‌شود.

پاسخ. $۴x^۲+۴y^۲+۴y=۳$.

۹۲. مرکز دایره در نقطهٔ برخورد عمود منصف پاره‌خط راست AB با محور $x'x$ قرار دارد. وسط پاره‌خط راست AB را C و مرکز دایره را ω می‌نامیم. داریم:

$$C(۳,۲\sqrt{۲}-\sqrt{۵}) \text{ و } m_{AB}=\frac{۲\sqrt{۲}+\sqrt{۵}}{۳},$$

ضریب زاویهٔ ωC (عمود منصف پاره‌خط راست AB)، عکس قرینهٔ ضریب زاویهٔ خط راست AB است:

$$m_{\omega C} = -\frac{۳}{۲\sqrt{۲}+\sqrt{۵}} = -\frac{۳(۲\sqrt{۲}-\sqrt{۵})}{(۲\sqrt{۲}+\sqrt{۵})(۲\sqrt{۲}-\sqrt{۵})} =$$

$$= -\frac{۳(۲\sqrt{۲}-\sqrt{۵})}{۸-۵} = -(۲\sqrt{۲}-\sqrt{۵})$$

بنابراین، با در دست داشتن مختصات نقطهٔ C و ضریب زاویهٔ خط راست ωC، معادلهٔ عمود منصف پاره‌خط راست AB به دست می‌آید:

$$y = -(۲\sqrt{۲}-\sqrt{۵})(x-۴)$$

با فرض $y = ۰$، طول نقطهٔ برخورد این خط راست با محور $x'x$ به دست می‌آید: $x = ۴$. نقطهٔ $\omega(۴,۰)$ مرکز دایره است. برای پیدا کردن طول شعاع دایره، کافی است طول یکی از پاره‌خط‌های راست ωA یا ωB را به دست آوریم:

$$|\omega B| = \sqrt{(۴-۰)^۲ + (۰+۲\sqrt{۵})^۲} = ۶$$

پاسخ. $(x-۴)^۲ + y^۲ = ۳۶$.

۹۳. *راهنمایی.* در معادلهٔ کلی دایره، یعنی

$$(x-\alpha)^۲ + (y-\beta)^۲ = ۱۶۹$$

مختصات نقطه‌های A و B را قرار دهید و، سپس، دو معادلهٔ حاصل را (که دارای دو مجهول α و β هستند) از هم کم کنید، به معادلهٔ $\alpha+\beta+۵ = ۰$ می‌رسید.

پاسخ. مساله دو جواب دارد: $(x+۹)^۲ + (y-۴)^۲ = ۱۶۹$؛

$$(x-۸)^۲ + (y+۱۳)^۲ = ۱۶۹$$

۹۴. از آن‌جا که دایره بر محورهای مختصات مماس است، بنابراین، تمامی دایره در یکی از چهار رُبع دستگاه محورهای مختصات قرار دارد؛ ولی $M(۲,۱)$، که یکی از نقطه‌های محیط دایره است، به ربع اول تعلق دارد، بنابراین دایرهٔ ما در ربع اول دستگاه محورهای مختصات واقع است. به همین علت، مرکز دایره، از دو محور به یک فاصله است، یعنی $\omega(a,a)$؛ درضمن $a > ۰$. همچنین، شعاع این دایره، برابر است با a. بنابراین، معادلهٔ دایره، به این صورت است:

$$(x-a)^۲ + (y-a)^۲ = a^۲$$

که باید مختصات نقطهٔ M در آن صدق کند:

$$(۲-a)^۲ + (۱-a)^۲ = a^۲ \Rightarrow a^۲ - ۶a + ۵ = ۰$$

برای مرکز دایره (و در نتیجه، شعاع آن)، دو جواب به دست می‌آید: $\omega \left| \begin{matrix} ۱ \\ ۱ \end{matrix} \right.$ و $R = ۱$ یا $\omega \left| \begin{matrix} ۵ \\ ۵ \end{matrix} \right.$ و $R = ۵$. معادلهٔ دایره، یکی از دو معادلهٔ زیر است:

$$(x-۱)^۲ + (y-۱)^۲ = ۱ \text{ یا } (x-۵)^۲ + (y-۵)^۲ = ۲۵$$

۹۵. *پاسخ.*

$$(x+۱)^۲ + (y-۱) = (۱-۱)^۲ + ۱ \text{ و } (x+۳)^۲ + (y+۳)^۲ = ۹$$

۹۶. *راهنمایی.* مثال ۳ را در متن درس ببینید.

پاسخ.

$$(x-۱)^۲ + (y-۵)^۲ = ۲۵$$

۹۷. *راهنمایی.* مختصات نقطه‌های M و N را در معادلهٔ کلی دایره قرار دهید و دو معادله‌ای را که بر حسب α و β و R به دست می‌آید، از

هم کم کنید، به معادلهٔ خطی $\alpha + ۷\beta + ۲۳ = ۰$ می‌رسید. (α, β)، یعنی مختصات مرکز دایره، باید در معادلهٔ خط راست $x - y - ۱ = ۰$ هم صدق کند:

$$\begin{cases} \alpha + ۷\beta + ۲۳ = ۰ \\ \alpha - \beta - ۱ = ۰ \end{cases} \Rightarrow \omega \left| \begin{matrix} -۲ \\ -۳ \end{matrix} \right.$$

پاسخ. $(x + ۲)^۲ + (y + ۳)^۲ = ۱۰۰$.

۹۸. پاسخ. $(x + ۳)^۲ + (y - ۲)^۲ = ۱۰۰$.

۹۹. پاسخ. $(۰, ۱-)$ و $(۵-, ۶-)$.

۱۰۰. مختصات مرکزهای دو دایره چنین‌اند:

$$\omega_۱(-۶, ۷) \text{ و } \omega_۲(۹, -۱)$$

در ضمن طول شعاع‌های دو دایره، $R_۱ = ۶$ و $R_۲ = ۱۱$ است. طول پاره‌خط راستی که دو مرکز را به هم وصل می‌کند، برابر است با

$$|\omega_۱\omega_۲| = \sqrt{(۹ + ۶)^۲ + (-۱ - ۷)^۲} = ۱۷$$

که برابر است با مجموع طول‌های دو شعاع. بنابراین دو دایره، از بیرون بر هم مماس‌اند.

ضریب زاویهٔ خط راستی که از دو مرکز می‌گذرد، برابر $-\frac{۸}{۱۵}$ و، بنابراین، ضریب زاویهٔ خط مماس برابر $\frac{۱۵}{۸}$ می‌شود.

برای یافتن نقطهٔ تماس دو دایره، باید معادله‌های دو دایره را با هم حل کنیم. سپس، با در دست داشتن نقطهٔ تماس و ضریب زاویهٔ خط مماس، معادلهٔ آن را به دست آوریم.

پاسخ. $۱۵x - ۸y + ۴۴ = ۰$.

یادداشت. وقتی مطمئن شویم، دو دایره بر هم مماس‌اند، کافی است معادلهٔ دو دایره را از هم کم کنیم. از این‌جا معادلهٔ خط راستی به دست می‌آید که همان معادلهٔ خط مماس است (اول آزمایش کنید، سپس، دلیل آن را پیدا کنید).

۱۰۱. *راهنمایی.* اگر فاصلهٔ مرکز دایره از خط راستی کوچکتر از طول شعاع دایره باشد، خط راست، محیط دایره را در دو نقطه قطع می‌کند؛ در حالتی که این فاصله برابر طول شعاع دایره باشد، خط راست بر دایره مماس است و، سرانجام، اگر فاصلهٔ مرکز دایره از خط راستی بزرگتر ازطول شعاع دایره باشد، خط راست دایره را قطع نمی‌کند.

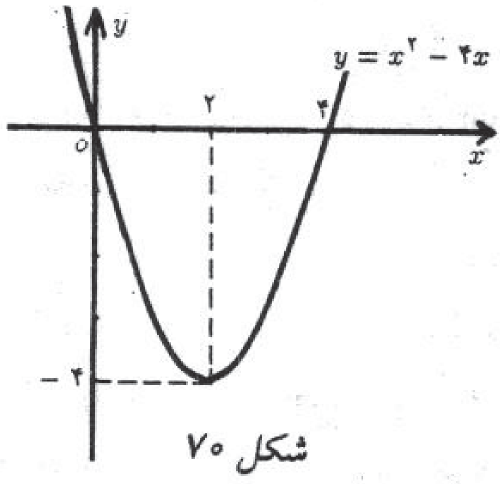
پاسخ. ۱) خط راست محیط دایره را در دو نقطه قطع می‌کند؛ ۲) خط راست بر دایره مماس است؛ ۳) خط راست در بیرون دایره است و، با آن، نقطهٔ مشترکی ندارند.

۱۰۲. *راهنمایی.* قطر مجهول، از مرکز دایره می‌گذرد و بر خط راست مفروض عمود است.

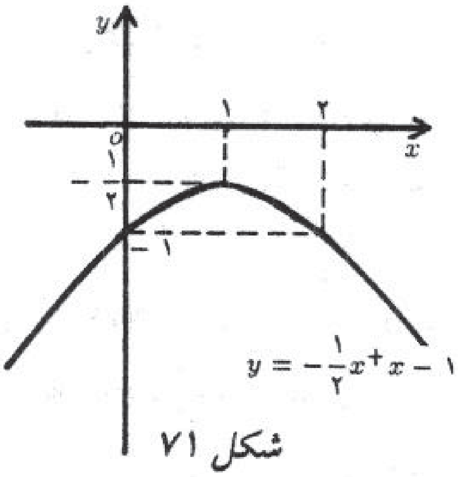
پاسخ. $۲x + y + ۱ = ۰$.

یادداشت. چون در صورت مساله، از خط راست $x - ۲y = ۲$، به عنوان وتری از دایره یاد کرده است، باید قبل از هر کار، مطمئن شویم، این خط راست، دایره را در نقطه قطع می‌کند، یعنی فاصلهٔ مرکز دایره از این خط راست، کوچکتر از طول شعاع دایره است. فاصلهٔ مرکز دایره از خط راست برابر $۳\sqrt{۵}$ درمی‌آید که از ۸، طول شعاع دایره، کوچکتر است؛ زیرا مجذور $۳\sqrt{۵}$، یعنی ۴۵ از مجذور ۸، یعنی ۶۴ کوچکتر است. پس خط راست مفروض، به‌واقع، وتری از دایره را جدا می‌کند.

۱۰۳. *راهنمایی.* چون نقطهٔ P، نقطهٔ وسط وتر است، بنابراین، خط راستی که از ω (مرکز دایره) و P می‌گذرد، بر این وتر عمود است.



شکل ۷۰



شکل ۷۱

پاسخ. $۴x - ۲y - ۱ = ۰$.

۱۰۴. *راهنمایی.* نقطهٔ M روی محیط دایره است و، بنابراین خط مماس، بر ωM در نقطهٔ M عمود است (ω مرکز دایره است).

پاسخ. $۲x + ۳y + ۱۳ = ۰$.

۱۰۵. پاسخ. خط راست، دایره را قطع نمی‌کند.

۱۰۶. معادلهٔ سهمی را می‌توان این طور نوشت:

$$y = -\frac{۱}{۸}x^۲ + \frac{۳}{۴}x + \frac{۱۵}{۸} =$$

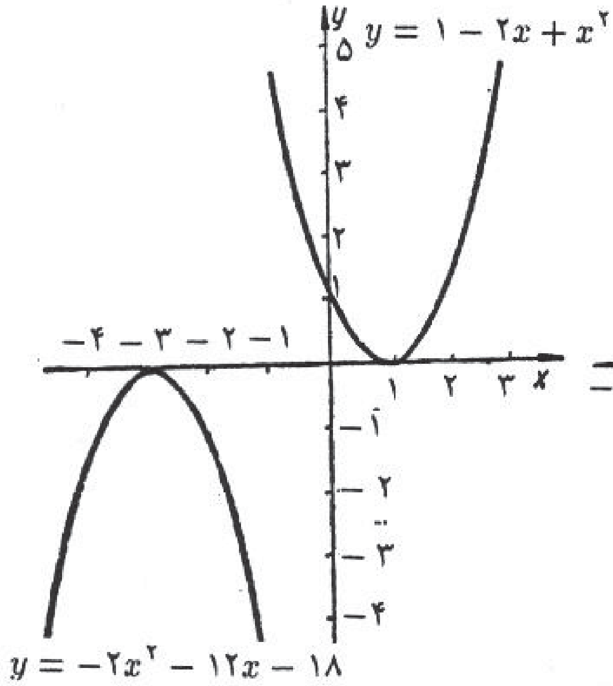
$$= -\frac{۱}{۸}(x^۲ - ۶x) + \frac{۱۵}{۸} =$$

$$= -\frac{۱}{۸}(x^۲ - ۶x + ۹ - ۹) + \frac{۱۵}{۸} =$$

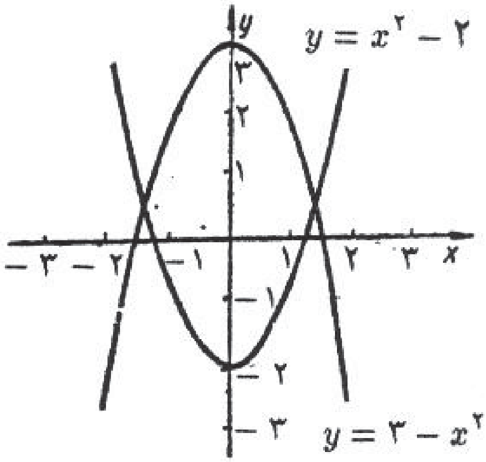
$$= -\frac{۱}{۸}(x - ۳)^۲ + \frac{۹}{۸} + \frac{۱۵}{۸} = -\frac{۱}{۸}(x - ۳)^۲ + ۳$$

پاسخ. $S(۳, ۳)$ راس سهمی و $x = ۳$ معادلهٔ محور تقارن سهمی است.

۱۰۷. نمودار هریک از سهمی‌های ۱) تا ۹) در شکل‌های از ۷۰ تا ۷۴ داده شده است.



شکل ۷۳



شکل ۷۲

۱۰۸. ۱) برای این‌که معادلهٔ درجه دوم

$$ax^۲ + by^۲ + cxy + dx + ey + f = ۰ \qquad (۱)$$

را بتوان به صورت معادلهٔ یک دایره، یعنی

$$(x - \alpha)^۲ + (y - \beta)^۲ = R^۲ \qquad (۲)$$

درآورد، با مقایسهٔ معادله‌های (۱) و (۲)، در آغاز، به این دو شرط می‌رسیم:

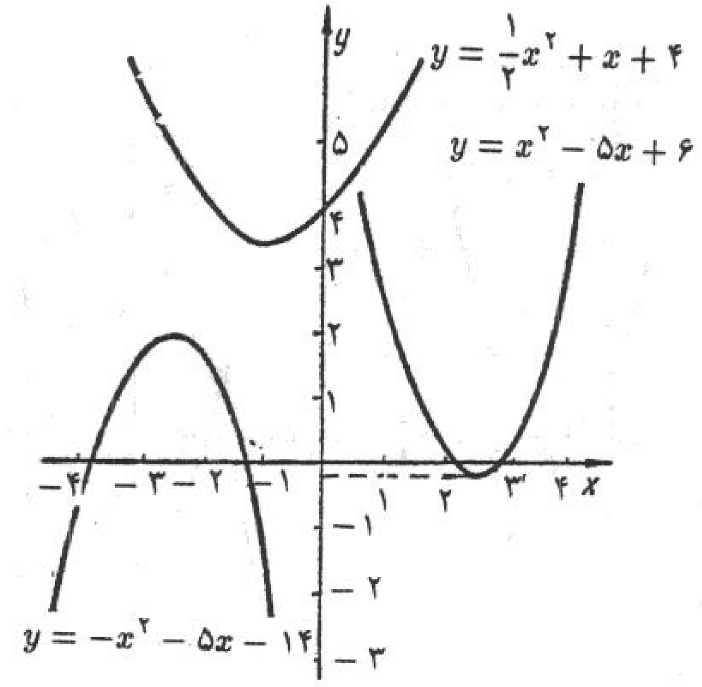
$$a = b \neq ۰ \text{ و } c = ۰$$

در این صورت، معادلهٔ (۱)، چنین می‌شود:

$$a(x^۲ + y^۲) + dx + ey + f = ۰$$

تلاش می‌کنیم، این معادله را به صورت معادلهٔ (۲) درآوریم. به ترتیب داریم:

$$x^۲ + y^۲ + \frac{d}{a}x + \frac{e}{a}y + \frac{f}{a} = ۰;$$



شکل ۷۴

$$\left(x^۲+\frac{d}{a}x+\frac{d^۲}{۴a^۲}\right)+\left(y^۲+\frac{e}{a}y+\frac{e^۲}{۴a^۲}\right)+$$
$$+\frac{f}{a}-\frac{d^۲}{۴a^۲}-\frac{e^۲}{۴a^۲}=۰;$$
$$\left(x+\frac{d}{۲a}\right)^۲+\left(y+\frac{e}{۲a}\right)^۲=\frac{d^۲+e^۲-۴af}{۴a^۲}$$

و این، معادلهٔ دایره‌ای که مختصات مرکز (ω) و طول شعاع آن (R)، چنین است:

$$\omega\left(-\frac{d}{۲a},-\frac{e}{۲a}\right) \text{ و } R=\frac{۱}{۲|a|}\sqrt{d^۲+e^۲-۴af}$$

و از همین جا، شرط دیگری هم پیدا می‌شود. برای این‌که، طول شعاع دایره، عددی حقیقی باشد، باید داشته باشیم:

$$d^۲+e^۲-۴af\geq ۰$$

در حالت $d^۲+e^۲-۴af=۰$، شعاع دایره، طولی برابر صفر پیدا می‌کند، یعنی دایره، به همان نقطهٔ $\omega\left(-\frac{d}{۲a}, -\frac{e}{۲a}\right)$ تبدیل می‌شود.

پاسخ. $a=b\neq ۰$، $c=۰$ و $d^۲+e^۲\geq ۴af$.

۲) پاسخ. $b=c=۰$، $e\neq ۰$ ، $a\neq ۰$. معادلهٔ سهمی چنین می‌شود:

$$y=-\frac{a}{e}x^۲-\frac{d}{e}x-\frac{f}{e}$$

که خط راست $x=-\frac{d}{۲a}$ محور تقارن آن است.

۱۰۹. ۱) به ازای $a=-۱$، معادلهٔ (۱) به صورت

$$y=-۲bx+b-۱$$

درمی‌آید که معادلهٔ یک خط راست است و باید مختصات نقطهٔ $O(۰,۰)$ بگذرد، باید $b=۱$.

پاسخ. به‌ازای $a=-۱$ و $b=۱$، تابع به معادله‌ای خطی به صورت $y=-۲x$ تبدیل می‌شود.

۲) باید مختصات نقطه‌های $(۰,-۱)$ و $(-۳,۵)$ در معادلهٔ سهمی صدق کنند.

پاسخ. $a=۱$ و $b=-۲$.

۳) نمودار سهمی باید از مبداء مختصات بگذرد؛ از این‌جا، به دست می‌آید: $a+b=۰$. چون سهمی بر محور $x'x$ در مبداء مماس است، مبداء مختصات راس سهمی است، یعنی طول راس سهمی برابر صفر است. داریم:

$$y=(a+۱)\left[\left(x^۲-\frac{۲b}{a+۱}x+\frac{b^۲}{(a+۱)^۲}\right)-\frac{b^۲}{(a+۱)^۲}\right]+$$

$$+a+b=(a+۱)\left(x-\frac{b}{a+۱}\right)^۲+\frac{b^۲+(a+b)(a+۱)}{a+۱}$$

سهمی، راسی به طول $x=\frac{b}{a+۱}$ دارد که باید برابر صفر باشد.

پاسخ. $a=b=۰$.

۴) $x=\frac{b}{a+۱}$؛ طول راس سهمی است (مسالهٔ ۱۰۹؛ ۳) را ببینید)، پس

$$\frac{b}{a+۱}=-۱\Rightarrow a+b+۱=۰$$

درضمن، مختصات راس S، در معادله سهمی صدق می‌کند:

$$(a+۱)+۲b+a+b=-۳\Rightarrow ۲a+۳b+۴=۰$$

پاسخ. $a=۱$ و $b=-۲$.

۵) راهنمایی. $x=۲$، طول راس سهمی است.

پاسخ. $a=-\frac{۷}{۸}$ و $b=\frac{۱}{۴}$.

۶) برای این که سهمی از مبداء مختصات بگذرد، باید داشته باشیم:

$$a+b=۰\Rightarrow b=-a$$

و معادلهٔ سهمی، به این صورت درمی‌آید:

$$y=(a+۱)x^۲+۲ax$$

مختصات راس این سهمی را (برحسب a) پیدا می‌کنیم:

$$y=(a+۱)\left(x^۲+\frac{۲a}{a+۱}x\right)=$$

$$=(a+۱)\left(x+\frac{a}{a+۱}\right)^۲-\frac{a^۲}{a+۱}$$

مختصات نقطهٔ S، راس سهمی، چنین است:

$$S \left| \begin{array}{l} x = -\dfrac{a}{a+۱} \\ y = -\dfrac{a^۲}{a+۱} = ax \end{array} \right.$$

برای یافتن معادلهٔ مکان هندسی نقطهٔ S، باید پارامتر a را بین x و y (طول و عرضِ نقطهٔ S) حذف کرد. a را بر حسب x محاسبه می‌کنیم:

$$x = -\frac{a}{a+۱} \Rightarrow ax + x = -a \Rightarrow a = -\frac{x}{x+۱}$$

و آن را به جای a، در $y = ax$ (عرض نقطهٔ S) قرار می‌دهیم.

پاسخ. $y = -\dfrac{x^۲}{x+۱}$.

۷) برای این که سهمی از نقطهٔ $(۲, ۰)$ بگذرد، باید داشته باشیم:

$$a + b = ۲ \Rightarrow b = ۲ - a$$

در این صورت، معادلهٔ سهمی، به صورت

$$y = (a+۱)x^۲ + ۲(a-۲)x + ۲ \qquad (*)$$

درمی‌آید که اگر آن را نسبت به a منظم کنیم:

$$(x^۲ + ۲x)a + (x^۲ - ۴x + ۲ - y) = ۰$$

این برابری، باید به‌ازای مقدارهای ثابتی از x و y (مختصات نقطهٔ ثابت)، برای هر مقدار حقیقی a برقرار باشد، یعنی این برابری، باید نسبت به a یک اتحاد باشد و داشته باشیم:

$$\begin{cases} x^۲ + ۲x = ۰ \\ x^۲ - ۴x + ۲ - y = ۰ \end{cases} \Rightarrow A \left| \begin{array}{l} ۰ \\ ۲ \end{array} \right. ,\ B \left| \begin{array}{l} -۲ \\ ۱۴ \end{array} \right.$$

سهمی $(*)$، به‌جز نقطهٔ $(۲,۰)$ (که در فرض مساله داده شده است)، از نقطهٔ ثابت $(-۲,۱۴)$ هم می‌گذرد.

۸) سهمی (۱) به‌ازای $a=-۲$ و $b=۲$ به صورت

$$y = -x^{۲} - ۴x$$

درمی‌آید. مختصات نقطه‌های A و B، با حل این دستگاه، معین می‌شوند:

$$\begin{cases} y = -x^{۲} - ۴x \\ y = m \end{cases} \Rightarrow A\left|\begin{array}{l} -۲+\sqrt{۴-m} \\ m \end{array}\right. ,\quad B\left|\begin{array}{l} -۲-\sqrt{۴-m} \\ m \end{array}\right.$$

درنتیجه، برای وسط پاره‌خط راست AB، خواهیم داشت:

$$M(x=-۲,\ y=m)$$

طول نقطهٔ M ثابت و برابر -۲ است، پس نقطهٔ M روی خط راست $x=-۲$ قرار دارد. ولی برای وجود نقطه‌های برخورد A و B، باید داشته باشیم:

$$۴-m \geq ۰ \Rightarrow m \leq ۴ \Rightarrow y \leq ۴$$

مکان نقطهٔ M، نیم‌خط راستی از خط راست $y=-۲$ است که، آغاز آن، نقطهٔ $(-۲,۴)$ می‌باشد و به طرف پایین امتداد دارد. [برای نقطه‌های A و B داریم $y=m$. وقتی شرط $m \leq ۴$ را برای m به دست آوریم، به معنای شرط $y \leq ۴$، برای نقطه‌های A و B و، در نتیجه نقطهٔ M است.]

۹) به ازای $a=۰$، سهمی (۱) به صورت

$$y = x^{۲} - ۲bx + b$$

درمی‌آید. نقطه‌های برخورد این سهمی را با خط راست $y = x + ۱$ پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} y = x^۲ - ۲bx + b \\ y = x + ۱ \end{cases} \Rightarrow x^۲ - (۲b + ۱)x + b - ۱ = ۰ \quad (۱)$$

معادلهٔ درجه دوم (۱)، طول‌های نقطه‌های برخورد سهمی و خط راست را به ما می‌دهد. این طول‌ها را $x_۱$ و $x_۲$ می‌نامیم. درضمن $x_۱$ و $x_۲$، همیشه (یعنی به‌ازای هر مقدار b) عددهایی حقیقی‌اند، زیرا مبیّن معادلهٔ (۱)

$$\Delta = (۲b + ۱)^۲ - ۴(b - ۱) = ۴b^۲ + ۵$$

همیشه مثبت است: خط راست، همیشه سهمی را در دو نقطه قطع می‌کند.

اگر وسط دو نقطهٔ برخورد را P بنامیم، برای طول نقطهٔ P باید داشته باشیم:

$$x_p = \frac{x_۱ + x_۲}{۲} = \frac{۲b + ۱}{۲}$$

($x_۱$ و $x_۲$، طول‌های نقطه‌های برخورد، ریشه‌های معادلهٔ (۱) و مجموع آن‌ها، بنابر رابطه‌های ویت، برابر $۲b + ۱$ است).

نقطه‌های برخورد، روی خط راست $y = x + ۱$ هستند. بنابراین، نقطهٔ P وسط پاره‌خط راستی که دو نقطهٔ برخورد را به هم می‌پیوندد، روی همین خط راست است. طول نقطهٔ P (یعنی $\frac{۲b + ۱}{۲}$) را به‌جای x در معادلهٔ $y = x + ۱$ قرار می‌دهیم تا عرض نقطهٔ P به دست آید:

$$y_P = (\frac{۲b + ۱}{۲}) + ۱ = b + \frac{۳}{۲}$$

[مواظب باشد، نقطهٔ P روی منحنی سهمی نیست]

اگر بین دو مختص نقطهٔ P، پارامتر b را حذف کنیم، معادلهٔ مکان P به دست می‌آید:

$$P \left| \begin{array}{l} x = b + \frac{1}{2} \\ y = b + \frac{3}{2} \end{array} \right. \Rightarrow y = x + 1$$

مکان نقطهٔ P، همان خط راست $y = x + 1$ است. این نتیجه را، بدون حل هم می‌توانستیم از همان آغاز پیش‌بینی کنیم. نقطهٔ P از خط راست $y = x + 1$ نمی‌تواند خارج شود، زیرا این خط، خط راست ثابتی است. تنها سهمی جابه‌جا می‌شود و نقطهٔ وسط دو نقطهٔ برخورد، همیشه روی خط راست $y = x + 1$ باقی می‌ماند. محاسبهٔ ما، تنها این نتیجه را داشت که مطمئن شویم، نقطهٔ P روی تمامی خط راست حرکت می‌کند، نه بخشی از آن.

۱۱۰. با کم کردن معادله‌های دو دایره از یکدیگر، به معادلهٔ درجه اول $y = x + 1$ می‌رسیم (که در واقع، معادلهٔ وتر مشترک دو دایره است). اگر در معادلهٔ یکی از دایره‌ها، y را برابر $x + 1$ قرار دهیم، ابتدا طول‌های نقطه‌های برخورد و، سپس، عرض‌های آن‌ها به دست می‌آید:

$$A(1, 2);\ B(3, 4)$$

اگر معادله‌های دو دایره را به صورت

$$(x - 5)^2 + y^2 = 20 \text{ و } x^2 + (y - 5)^2 = 10$$

بنویسیم، مختصات مرکزها، به روشنی دیده می‌شود:

$$\omega_1(5, 0);\ \omega_2(0, 5)$$

در چهارضلعی $\omega_۱ A \omega_۲ B$، قطرها بر هم عمودند (خط راستی که دو مرکز را به هم وصل می‌کند، بر وتر مشترک دو دایره عمود است و آن را نصف می‌کند). بنابراین، برای محاسبه مساحت چهارضلعی، کافی است نصف حاصل ضرب طول‌های دو قطر را به دست آوریم.

پاسخ. ۱۰ واحد مربع.

۱۱۱. معادله‌های دوسهمی را در یک دستگاه قرار دهید و مختصات نقطه‌های برخورد آن‌ها را پیدا کنید:

$$A(۱,۲) \text{ و } B(۲,۳)$$

معادلهٔ خط راست AB به صورت $x - y + ۱ = ۰$ درمی‌آید و فاصلهٔ مبداء مختصات از آن برابر $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ می‌شود. طول پاره‌خط راست AB برابر $\sqrt{۲}$ است.

پاسخ. مساحت مثلث OAB، برابر $\frac{۱}{۲}$ واحد مربع است.

۱۱۲. به یاری دستگاهی که شامل معادله‌های دو سهمی است، مختصات نقطه‌های M و N (نقطه‌های برخورد دو سهمی) به دست می‌آید:

$$M(۱,-۱),\ N\left(\frac{۲}{۳},-\frac{۷}{۹}\right)$$

مختصات راس‌های دو سهمی هم، به سادگی به دست می‌آید:

$$S_۱(۱,-۱),\ S_۲\left(\frac{۱}{۲},-\frac{۳}{۴}\right)$$

می‌بینیم، راس سهمی $y = ۲x^۲ - ۴x + ۱$، بر نقطهٔ M (یکی از نقطه‌های برخورد دو سهمی) منطبق است. بنابراین، چهار ضلعی، به مثلث $MNS_۲$ تبدیل می‌شود. معادلهٔ ضلع MN از این مثلث، به سادگی به دست می‌آید:

$$(MN):\ ۲x + ۳y + ۱ = ۰$$

بنابراین، فاصلهٔ نقطهٔ $S_۲$ از خط راست MN (یعنی طول ارتفاع مثلث $MNS_۲$)، چنین است:

$$h = \frac{\left|۲ \times \frac{۱}{۲} + ۳ \times -\frac{۳}{۴} + ۱\right|}{\sqrt{۲^۲ + ۳^۲}} = \frac{۱}{۴\sqrt{۱۳}}$$

و برای طول قاعدهٔ MN داریم:

$$|MN| = \sqrt{\left(\frac{۲}{۳} - ۱\right)^۲ + \left(-\frac{۷}{۹} + ۱\right)^۲} = \frac{۱}{۹}\sqrt{۱۳}$$

و برای مساحت مثلث $MNS_۲$:

$$S = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۹}\sqrt{۱۳} \times \frac{۱}{۴\sqrt{۱۳}} = \frac{۱}{۷۲}$$ (واحد مربع)

۱۱۳. در متن درس (سخنی دربارهٔ خط راست و سهمی در صفحه ۱۳۰) دیدیم، وقتی خط راست بر سهمی (به طور کلی بر یک منحنی) مماس است که، ضمن حل دستگاه شامل معادله‌های سهمی و خط راست، به دو جواب برابر برسیم. دستگاه لازم را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{cases} y = x^۲ - ۳x + ۱ \\ y = x + ۲m + ۱ \end{cases} \Rightarrow x^۲ - ۴x - ۲m = ۰$$

و برای این که این معادله، دو ریشهٔ برابر (یک ریشهٔ مضاعف) داشته باشد، باید مبیّن آن برابر صفر باشد:

$$\Delta = ۱۶ + ۸m = ۰ \Rightarrow m = -۲$$

به ازای $m = -۲$، خط راست و سهمی بر هم مماس‌اند و نقطهٔ مشترک آن‌ها (یعنی نقطهٔ تماس)، $T(۲, -۱)$ است.

۱۱۴. پاسخ. $T(۲,۳)$، $A\left(-\frac{۱}{۲}, \frac{۱۷}{۴}\right)$ و $S(۱,۲)$. معادلهٔ ضلع‌های مثلث ATS:

$$(TA):\ x + ۲y - ۸ = ۰;\quad (TS):\ x - y + ۱ = ۰;$$
$$(AS):\ ۳x + ۲y - ۷ = ۰$$

۱۱۵. پاسخ. اگر نقطه‌های برخورد دایره و سهمی را A، B، C و D بنامیم، داریم: $A(۱,-۴)$، $B(-۱,-۴)$، $C(-۲,-۱)$ و $D(۲,-۱)$. چهارضلعی $ABCD$، یک ذوزنقه با قاعده‌های AB و CD است (که با محور $x'x$ موازی‌اند). مساحت ذوزنقه برابر ۹ واحد مربع است.

۱۱۶. اگر $A_۱(x_۱, y_۱)$ را نقطه‌ای از سهمی $y = x^۲$ و $A_۲(x_۲, y_۲)$ را قرینهٔ $A_۱$ نسبت به نقطهٔ $\omega(۱,۳)$ فرض کنیم، چون ω وسط پاره‌خط راست $A_۱A_۲$ است، باید داشته باشیم:

$$x_۱ + x_۲ = ۲ \text{ و } y_۱ + y_۲ = ۶$$

بنابراین، برای پیدا کردن معادلهٔ سهمی مجهول (قرینهٔ سهمی $y = x^۲$ نسبت به نقطهٔ ω)، باید در معادلهٔ $y = x^۲$، x را به $۲ - x$ و y را به $۶ - y$ تبدیل کنیم که، در این صورت، به دست می‌آید:

$$۶ - y = (۲ - x)^۲ \Rightarrow y = -x^۲ + ۴x + ۲$$

یادداشت. در حالت کلی، برای پیدا کردن قرینهٔ منحنی $y = f(x)$ نسبت به نقطهٔ $\omega(\alpha, \beta)$، باید در معادلهٔ $y = f(x)$، x را به $۲\alpha - x$ و y را به $۲\beta - y$ تبدیل کرد.

۱۱۷. معادله سهمی را به صورت

$$y = ax^۲ + bx + c$$

در نظر می‌گیریم. باید مختصات نقطه‌های A، B و C در معادلهٔ سهمی صدق کنند. در نتیجه، به این دستگاه می‌رسیم:

$$\begin{cases} a+b+c=۱۳ \\ c=۷۰ \\ ۴a+۲b+c=۱۳۷۰ \end{cases}$$

که از آنجا به دست می‌آید: $a=۷۰۷$، $b=-۷۶۴$، $c=۷۰$ و

$$y=۷۰۷x^۲-۷۶۴x+۷۰$$

بخش درست عدد

۱۱۸. دو حالت در نظر می‌گیریم:

حالت اول) $۰ \leq \alpha < \frac{۱}{۲}$ در این صورت

$$۰ \leq ۲\alpha < ۱ \text{ و } \frac{۱}{۲} \leq \alpha + \frac{۱}{۲} < ۱$$

بنابراین $\left[\alpha+\frac{۱}{۲}\right]=۰$ و $[۲\alpha]=۰$ و دو طرف برابری، برابر صفر می‌شود.

حالت دوم) $\frac{۱}{۲} \leq \alpha < ۱$. در این حالت

$$۱ \leq ۲\alpha < ۲ \text{ و } ۱ \leq \alpha+\frac{۱}{۲} < \frac{۳}{۲}$$

و هر طرف برابری، برابر ۱ می‌شود.

۱۱۹. پاسخ. اگر $a < ۱$ و $a \neq ۰$، آن وقت $[a] < \{a\}$؛ اگر $a \geq ۱$، آن وقت $[a] > \{a\}$.

اگر $a = ۰$، آن وقت $\{a\} = [a]$.

در واقع، برای $a < ۰$، مقدار $[a]$ منفی و حاصل $\{a\}$ مثبت است؛ در صورتی که $۰ < a < ۱$، مقدار $[a]$ برابر صفر و مقدار $\{a\}$ عددی مثبت است. در این دو حالت $[a]$ از $\{a\}$ کوچکتر است.

۱۲۰. فرض کنید $x = k + \alpha$ و $y = h + \beta$ که، در آن‌ها، k و h عددهای درست و $۰ \leq \alpha < ۱$ و $۰ \leq \beta < ۱$.

پاسخ. **الف)** $x - y = \alpha - \beta$ $(k = h)$؛

ب) $x - y$ برابر عددی درست است برابر $k - h$.

به این دو مثال توجه کنید:

برای دو عدد $x = ۴/۷$ و $y = ۱/۷$ داریم: $\{x\} = \{y\}$ و

$$x - y = ۴/۷ - ۱/۷ = ۳$$

برای $x = ۲/۹$ و $y = -۳/۱$ داریم:

$$\{x\} = ۰/۹ \text{ و } \{y\} = \{-۳/۱\} = ۰/۹;$$
$$x - y = ۲/۹ - (-۳/۱) = ۲/۹ + ۳/۱ = ۶$$

۱۲۱. ۱) داریم:

$$[\sqrt{۱}] + [\sqrt{۲}] + [\sqrt{۳}] = ۱ + ۱ + ۱ = ۳ \times ۱ = ۳;$$
$$[\sqrt{۴}] + [\sqrt{۵}] + [\sqrt{۶}] + [\sqrt{۷}] + [\sqrt{۸}] = ۵ \times ۲ = ۱۰;$$
$$[\sqrt{۹}] + \ldots + [\sqrt{۱۵}] = ۷ \times ۳ = ۲۱$$

پاسخ. ۳۴.

***یادداشت.** این مساله را می‌توان در حالت کلی حل کرد و مجموع

$$A = [\sqrt{۱}] + [\sqrt{۲}] + [\sqrt{۳}] + \ldots + [\sqrt{n}]$$

را به دست آورد. در آغاز به نکته‌ای توجه کنیم. $a \in \mathbf{N}$ می‌گیریم؛ در این صورت

اگر $۱^۲ \le a < ۲^۲$، آن وقت $[\sqrt{a}] = ۱$: ۳ عدد؛
اگر $۲^۲ \le a < ۳^۲$، آن وقت $[\sqrt{a}] = ۲$: ۵ عدد؛
اگر $۳^۲ \le a < ۴^۲$، آن وقت $[\sqrt{a}] = ۳$: ۷ عدد؛

و به طور کلی

اگر $k^۲ \le a < (k+۱)^۲$، آن وقت $[\sqrt{a}] = k$: $\mathbf{۲k + ۱}$ عدد؛

نتیجهٔ اخیر روشن است: از $k^۲$ تا $(k+۱)^۲$ [با به حساب آوردن $k^۲$ و به حساب نیاوردن $(k+۱)^۲$]، به تعداد

$$(k+۱)^۲ - k^۲ = (k^۲ + ۲k + ۱) - k^۲ = ۲k + ۱$$

عدد وجود دارد. به این ترتیب، مجموع A به صورت

$$A = ۳ \times ۱ + ۵ \times ۲ + ۷ \times ۳ + ۹ \times ۴ + \ldots + (۲k+۱)k + \ldots$$

درمی‌آید. ولی تا کجا باید ادامه داد. با مثال روشن می‌کنیم. فرض کنید:

$$M = [\sqrt{۱}] + [\sqrt{۲}] + [\sqrt{۳}] + \ldots + [\sqrt{۱۰۰۰}]$$

ببینیم عدد ۱۰۰۰ بین کدام مجذورهای کامل متوالی است؟

$$۹۶۱ < ۱۰۰۰ < ۱۰۲۴ \Rightarrow ۳۱^۲ < ۱۰۰۰ < ۳۲^۲$$

ابتدا مجموع عددهای از $[\sqrt{۱}]$ تا $[\sqrt{۹۶۰}]$ را محاسبه می‌کنیم با توجه به آن‌چه گفتیم، باید مجموع زیر را به دست آوریم:

$$M_۱ = ۳ \times ۱ + ۵ \times ۲ + ۷ \times ۳ + \ldots + ۶۱ \times ۳۰ \qquad (۱)$$

آن‌چه باقی می‌ماند، عبارت است از مجموع

$$M_۲ = [\sqrt{۹۶۱}] + [\sqrt{۹۶۲}] + \ldots + [\sqrt{۱۰۰۰}]$$

روی هم ۴۰ جمله و هر جمله برابر ۳۱. پس

$$M = ۳ \times ۱ + ۵ \times ۲ + ۷ \times ۳ + \ldots + ۶۱ \times ۳۰ + ۴۰ \times ۳۱ \quad (۲)$$

مجموع M را، بدون جملهٔ آخر، در حالت کلی به دست می‌آوریم. هر جملهٔ این مجموع به صورت $(۲k + ۱)k$ است:

$$۳ \times ۱, ۵ \times ۲, ۷ \times ۳, \ldots, (۲k + ۱)k, \ldots, (۲n + ۱)n$$

اول جملهٔ عمومی این دنباله، یعنی $(۲k + ۱)k$ را در نظر می‌گیریم:

$$(۲k + ۱)k = ۲k^۲ + k \qquad (*)$$

در برابری $(*)$، به ترتیب به جای n، عددهای از ۱ تا n را قرار می‌دهیم و زیر هم می‌نویسیم:

$$۳ \times ۱ = ۲ \times ۱^۲ + ۱$$

$$۵ \times ۲ = ۲ \times ۲^۲ + ۲$$

$$۷ \times ۳ = ۲ \times ۳^۲ + ۳$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(۲n + ۱) \times n = ۲n^۲ + n$$

این برابری‌ها را با هم جمع می‌کنیم:

$$۳ \times ۱ + ۵ \times ۲ + ۷ \times ۳ + \ldots + (۲n + ۱)n =$$

$$= ۲(۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲ + \ldots + n^۲) + (۱ + ۲ + ۳ + \ldots + n) =$$

$$= ۲ \times \frac{n(n + ۱)(۲n + ۱)}{۶} + \frac{n(n + ۱)}{۲} = \frac{۱}{۶}n(n + ۱)(۴n + ۵)$$

که اگر $n = ۳۰$ بگیریم، مقدار $M_۱$ به دست می‌آید:

$$M_۱ = \frac{۱}{۶} \times ۳۰ \times ۳۱ \times ۱۲۵ = ۱۹۳۷۵$$

اکنون کافی است ۳۱×۴۰، یعنی ۱۲۴۰ را به $M_۱$ اضافه کنیم تا مقدار M به دست آید: $M = ۲۰۶۱۵$.

توجه کنید: برای محاسبهٔ مجموع n عدد پشت سر هم و، همچنین، مجموع مجذورهای n عدد پشت سر هم، مسالهٔ ۲۴۶ را، در جلد اول ریاضیات محاسبه ببینید.

۲) در آغاز به نکته‌ای توجه کنیم: فرض کنید عددهای مثبت x و y درست نباشند و در ضمن $x + y$ عددی درست باشد، آن وقت

$$\{x\} + \{y\} = ۱$$

مطلب روشن است. مثلاً برای $x = ۳/۷$ و $y = ۱/۳$ داریم:

$$۳/۷ + ۱/۳ = ۵ \text{ و } \{۳/۷\} + \{۱/۳\} = ۱$$

و یا برای $x = \frac{۷}{۵}$ و $y = \frac{۳}{۵}$ داریم:

$$\left\{\frac{۷}{۵}\right\} + \left\{\frac{۳}{۵}\right\} = \frac{۲}{۵} + \frac{۳}{۵} = ۱$$

در مجموع ما $\{m\}$ برابر صفر است $(m \in \mathbf{N})$. مجموع را S می‌نامیم و آن را دو بار زیر هم می‌نویسیم (یکبار از چپ به راست و بار دیگر از راست به چپ):

$$S = \left\{\frac{m}{n}\right\} + \left\{\frac{۲m}{n}\right\} + \ldots + \left\{(n-۲)\frac{m}{n}\right\} + \left\{(n-۱)\frac{m}{n}\right\}$$

$$S = \left\{(n-۱)\frac{m}{n}\right\} + \left\{(n-۲)\frac{m}{n}\right\} + \ldots + \left\{\frac{۲m}{n}\right\} + \left\{\frac{m}{n}\right\}$$

از مجموع این دو برابری به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}۲S = &\left(\left\{\frac{m}{n}\right\} + \left\{(n-۱)\frac{m}{n}\right\}\right) + \left(\left\{\frac{۲m}{n}\right\} + \left\{(n-۲)\frac{m}{n}\right\}\right) + \\ \ldots + &\left(\left\{(n-۲)\frac{m}{n}\right\} + \left\{\frac{۲m}{n}\right\}\right) + \left(\left\{(n-۱)\frac{m}{n}\right\} + \left\{\frac{m}{n}\right\}\right)\end{aligned}$$

در هر پرانتز دو مقداری که هرکدام داخل نماد $\{\ \}$ هستند، عددهایی غیر صحیح‌اند (زیرا m و n نسبت به هم اول‌اند) و مجموعی برابر یک عدد درست دارند.

$$\frac{m}{n} + (n-۱)\frac{m}{n} = \frac{m}{n}(۱ + (n-۱)) = \frac{m}{n} \times n = m,$$
$$\frac{۲m}{n} + (n-۲)\frac{m}{n} = \frac{m}{n}(۲ + (n-۲)) = n \times \frac{m}{n} = m, \ldots$$

بنابراین، طبق آن‌چه در آغاز حل اشاره کردیم، مقدار داخل هر پرانتز در عبارت $۲S$ برابر واحد است و چون دارای $(n-۱)$ جمله است (چرا؟) بنابراین

$$۲S = n - ۱ \Rightarrow S = \frac{۱}{۲}(n-۱)$$

۱۲۲. ۱) می‌دانیم، برای عدد درست k داریم: $[x+k] = [x] + k$.
بنابراین معادلهٔ مفروض، به صورت زیر درمی‌آید.

$$[x] + ۱ + [x] - ۲ - [x] - ۳ = ۲ \Rightarrow [x] = ۶$$

پاسخ. $۶ \leq x < ۷$.

۲) پاسخ. $x \in \mathbf{R}$.

۳) معادله، نسبت به مجهول $[x]$، از درجهٔ دوم است: $[x] = ۱$ و $[x] = ۴$.

پاسخ. $2 > x \geq 1$ و $5 > x \geq 4$.

۴) پاسخ. $x = k + \frac{1}{2}$ $(k \in \mathbf{Z})$، $x = k + \frac{1}{4}$ $(h \in \mathbf{Z})$.

۵) باید داشته باشیم:

$$1 \leq x^2 - 5x + 6 < 2$$

که منجر به حل این دستگاه می‌شود:

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 6 < 2 \\ x^2 - 5x + 6 \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 4 < 0 \\ x^2 - 5x + 5 \geq 0 \end{cases}$$

برای برقراری نامعادلهٔ اول باید داشته باشیم $4 > x > 1$؛ و برای برقراری نامعادلهٔ دوم: $x \leq \frac{5 - \sqrt{5}}{2}$ یا $x \geq \frac{5 + \sqrt{5}}{2}$.

پاسخ. $1 < x \leq \frac{5 - \sqrt{5}}{2}$ و $\frac{5 + \sqrt{5}}{2} \leq x < 4$.

۶) پاسخ. $-\sqrt{5} < x \leq -2$ و $2 \leq x < \sqrt{5}$.

۷) پاسخ. $3 > x \geq 2$ و $-1 > x \geq -2$.

۸) $x^2 + \frac{1}{2}$ مقداری مثبت است. بنابراین

$$\left[x^2 + \frac{1}{2}\right] = n \geq 0$$

ببینیم $[-x^2 + 3x]$ چه عددهایی می‌تواند باشد! روشن است که، این عدد، نمی‌تواند منفی باشد، زیرا $n \geq 0$. همچنین، این عدد، نمی‌تواند از ۲ بزرگتر باشد، زیرا با فرض

$$-x^2 + 3x \geq 3 \Rightarrow x^2 - 3x + 3 < 0$$

به نتیجهٔ $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} < 0$ می‌رسیم که ممکن نیست. پس n می‌تواند برابر ۰، ۱ یا ۲ باشد. به این ترتیب، سه دستگاه زیر برای پیدا کردن جواب

معادله به دست می‌آید:

$$n = ۰, \begin{cases} ۰ \leq x^۲ + \frac{۱}{۲} < ۱ \\ ۰ \leq -x^۲ + ۳x < ۱ \end{cases} \; ; \; n = ۱, \begin{cases} ۱ \leq x^۲ + \frac{۱}{۲} < ۲ \\ ۱ \leq -x^۲ + ۳x < ۲ \end{cases} \; ;$$

$$n = ۲, \begin{cases} ۲ \leq x^۲ + \frac{۱}{۲} < ۳ \\ ۲ \leq -x^۲ + ۳x < ۳ \end{cases}$$

که هر دستگاه، منجر به دستگاهی شامل ۴ نامعادله می‌شود. به عنوان نمونه، دستگاهی را که به‌ازای $n = ۰$ به دست می‌آید، حل می‌کنیم. این دستگاه شامل ۴ نامعادله است. $x^۲ - ۳x \leq ۰$ و $x^۲ - ۳x + ۱ > ۰$ و $x^۲ - \frac{۱}{۲} < ۰$ و $x^۲ + \frac{۱}{۲} \geq ۰$.نامعادلهٔ $x^۲ + \frac{۱}{۲} \geq ۰$ همیشه برقرار است. بنابراین باید جواب‌های مشترک سه نامعادلهٔ دیگر را پیدا کنیم. نامعادلهٔ $x^۲ - \frac{۱}{۲} < ۰$، منجر به این جواب می‌شود:

$$-\frac{\sqrt{۲}}{۲} < x < \frac{\sqrt{۲}}{۲} \qquad (۱)$$

نامعادلهٔ $x^۲ - ۳x + ۱ > ۰$، منجر به جواب

$$x < \frac{۱}{۲}(۳ - \sqrt{۵}) \text{ یا } x > \frac{۱}{۲}(۳ + \sqrt{۵}) \qquad (۲)$$

و سرانجام، برای نامعادلهٔ $x^۲ - ۳x \leq ۰$ به دست می‌آید:

$$۰ \leq x \leq ۳ \qquad (۳)$$

مقایسهٔ (۱) و (۲) و (۳) با یکدیگر، ما را به این نتیجه می‌رساند که جواب دستگاه است: $۰ \leq x < \frac{۱}{۲}(۳ - \sqrt{۵})$

پاسخ. $\frac{1}{2}(3-\sqrt{5}) > x \geq 0$، $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x < 1$

$$\frac{1}{2}\sqrt{6} \leq x < \frac{1}{2}\sqrt{10}$$

۹) *راهنمایی.* از اتحاد $\left[x + \frac{1}{2}\right] = [2x] - [x]$ استفاده کنید. (مثال ۵ را در متن درس ببینید).

پاسخ. $0 > x \geq -1$ و $2 \leq x < 3$

۱۰) معادلهٔ مفروض، هم‌ارز است با نامعادلهٔ

$$1 \leq x[x] < 2$$

$x = k + \alpha$ می‌گیریم $(0 \leq \alpha < 1, k \in \mathbf{Z})$. بنابراین، به این نامعادله می‌رسیم:

$$1 \leq k^2 + \alpha k < 2 \qquad (1)$$

نابرابری‌های (۱)، به‌ازای $k = 1$ برقرار است، زیر منجر به نابرابری‌های $0 \leq \alpha < 1$ می‌شود. به ازای $k = 0$ و $k \geq 2$، نابرابری‌های (۱) برقرار نیستند (آزمایش کنید!). برای $k = -1$، تنها وقتی نابرابری‌های (۱) برقرارند که داشته باشیم $\alpha = 0$. برای $k \leq -2$ به دست می‌آید $k^2 \geq 4$ و $\alpha k \leq 0$. در این حالت، برای α، عددی بزرگتر از ۱ به دست می‌آید. مثلاً برای $k = -2$، با توجه به نابرابری سمت راست (۱)

$$k^2 + \alpha k < 2 \Rightarrow 4 - 2\alpha < 2 \Rightarrow \alpha > 1$$

که ممکن نیست.

پاسخ. $1 \leq x < 2$ و $x = -1$.

یادداشت. این معادله را با آزمایش هم می‌توان حل کرد:

برای $0 \le x < 1$ به دست می‌آید $[x] = 0$ و $x[x] = 0$ و در نتیجه

$$[x[x]] = 0 \neq 1$$

برای $1 \le x < 2$، داریم $[x] = 1$ و $1 \le x[x] = x < 2$،
درنتیجه

$$[x[x]] = 1 \quad \text{(جواب)}$$

برای $x \ge 2$، داریم $[x] \ge 2$ و $x[x] \ge 4$، در نتیجه

$$[x[x]] \ge 4 \neq 1$$

برای $-1 < x < 0$ به دست می‌آید $[x] = -1$ و $0 < x[x] < 1$
و

$$[x[x]] = 0 \neq 1$$

اگر $x = -1$، آن وقت $[x] = -1$ و $x[x] = 1$ و

$$[x[x]] = 1 \quad \text{(جواب)}$$

اگر $x < -1$، آن وقت $[x] \le -2$ و $x[x] \ge 4$ و

$$[x[x]] \ge 4 \neq 0$$

بنابراین: $1 \le x < 2$ و $x = -1$.

۱۱) فرض می‌کنیم:

$$\left[\frac{x-3}{2}\right] = \left[\frac{x-2}{3}\right] = m, \ (m \in \mathbf{Z})$$

بنابراین باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} m \leq \frac{x-۳}{۲} < m+۱ \\ m \leq \frac{x-۲}{۳} < m+۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲m+۳ \leq x < ۲m+۵ \\ ۳m+۲ \leq x < ۳m+۵ \end{cases}$$

(۱)

در دستگاه اخیر، اگر واسطهٔ x را کنار بگذاریم، به این دستگاه می‌رسیم:

$$\begin{cases} ۲m+۳ < ۳m+۵ \\ ۳m+۲ < ۲m+۵ \end{cases} \Rightarrow -۲ < m < ۳$$

یعنی m می‌تواند یکی از عددهای ۱−، ۰، ۱ یا ۲ باشد. و برای هر حالت، جواب x، از دستگاه(۱) به دست می‌آید.

پاسخ. $۱ \leq x < ۲$، $۳ \leq x < ۵$، $۵ \leq x < ۷$، $۸ \leq x < ۹$.

مجموعهٔ جواب را می‌توان به این صورت نوشت:

$$[۱, ۲) \cup [۳, ۷) \cup [۸, ۹)$$

۱۲) اگر معادله را به این صورت بنویسیم:

$$[x] + ۱ = x^۴ - ۲x^۲ + ۱ = (x^۲ - ۱)^۲$$

نتیجه می‌گیریم:

$$[x] + ۱ \geq ۰ \Rightarrow [x] \geq -۱ \Rightarrow x \geq -۱$$

از طرف دیگر با فرض $x \geq ۲$، خواهیم داشت:

$$[x] \leq x \text{ و } ۲x^۲ \leq x^۳$$

و در نتیجه، از مجموع آن‌ها به دست می‌آید:

$$۲x^۲ + [x] \leq x^۳ + x < ۲x^۳ \leq x^۴$$

که با فرض مساله، یعنی $x^۴ = [x] + ۲x^۲$ سازگار نیست.

به این ترتیب، باید جواب‌های معادله را با شرط $-۱ \leq x < ۲$ پیدا کرد.

اگر $-۱ \leq x < ۰$، آن وقت $[x] = -۱$ و به دست می‌آید:

$$x^۴ - ۲x^۲ + ۱ = ۰ \Rightarrow (x^۲ - ۱)^۲ = ۰$$

که تنها جواب -۱ با شرط این حالت سازگار است.

اگر $۰ \leq x < ۱$، آن وقت $[x] = ۰$ و به معادله

$$x^۴ - ۲x^۲ = ۰$$

می‌رسیم که تنها $x = ۰$ با شرط $۰ \leq x < ۱$ سازگار است.

اگر $۱ \leq x < ۲$، آن وقت $[x] = ۱$ و

$$x^۴ - ۲x^۲ - ۱ = ۰$$

که جواب $x = \sqrt{۱ + \sqrt{۲}}$ از این معادله قابل پذیرش است.

پاسخ. $x_۱ = -۱$، $x_۲ = ۰$، $x_۳ = \sqrt{۱ + \sqrt{۲}}$.

۱۳) روشن است که اگر $[x] = n$، آن وقت باید داشته باشیم: $\{x\} = \frac{۱}{n}$ تا حاصل ضرب $[x] \cdot \{x\}$ برابر واحد شود.

پاسخ. $x = n + \frac{۱}{n}$ $(n \in \mathbf{N})$. توجه کنید، عدد $\{x\}$ همیشه نامنفی است و، بنابراین $[x] \geq ۰$؛ x نمی‌تواند عددی منفی باشد. $x = ۰$ هم در معادله صدق نمی‌کند، پس $x > ۰$. به همین دلیل، در جواب معادله، n را عددی طبیعی گرفتیم.

۱۴) فرض می‌کنیم:

$$[x] = \left[\frac{x^۳ - ۲}{۳}\right] = m;\ (m \in \mathbf{Z})$$

بنابراین، باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} m \le x < m+1 \\ m \le \dfrac{x^3-2}{3} < m+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m^3 \le x^3 < (m+1)^3 \\ 3m+2 \le x^3 < 3m+5 \end{cases}$$

از این‌جا، به این دستگاه، نسبت به m، می‌رسیم:

$$\begin{cases} m^3 < 3m+5 \\ 3m+2 < (m+1)^3 \end{cases}$$

نامعادله اول را به صورت $m^2(m-3) < -3m^2+3m+5$ می‌نویسیم. به‌ازای $m \ge 3$، مقدار سمت چپ نامعادله غیر منفی و مقدار سمت راست آن منفی می‌شود. بنابراین $m < 3$.

نامعادلهٔ دوم به صورت $m^2(m+3) > 1$ درمی‌آید که به‌ازای $m \le -3$، سمت چپ نامعادله نامثبت می‌شود. بنابراین $m > -3$.

در نتیجه باید m را برای عددهای -2، -1، 0، 1 و 2 مورد استفاده قرار داد. با در دست داشتن m می‌توان دستگاه‌هایی، هر یک شامل دو نامعادله، برای به دست آوردن x تشکیل داد. مثلاً برای $m=-2$ به دست می‌آید:

$$\begin{cases} [x] = -2 \\ \left[\dfrac{x^3-2}{3}\right] = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 \le x < -1 \\ -2 \le \dfrac{x^3-2}{3} < -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2 \le x < -1 \\ -4 \le x^3 < -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2 \le x < -1 \\ -\sqrt[3]{4} \le x < -1 \end{cases} \Rightarrow -\sqrt[3]{4} \le x < -1$$

و دستگاه دوم

$$\begin{cases} [x] = -1 \\ \left[\dfrac{x^3 - 2}{3}\right] = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 \le x < 0 \\ -1 \le \dfrac{x^3 - 2}{3} < 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -1 \le x < 0 \\ -1 \le x^3 < 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -1 \le x < 0 \\ -1 \le x < \sqrt[3]{2} \end{cases} \Rightarrow -1 \le x < 0$$

که اگر جواب‌های این دو حالت را با هم در نظر بگیریم، به این جواب می‌رسیم:

$$-\sqrt[3]{4} \le x < 0$$

به همین ترتیب، می‌توان برای بقیهٔ مقدارهای m، دستگاه‌های نامعادله‌ها را تشکیل داد و جواب‌ها را به دست آورد.

پاسخ. $-\sqrt[3]{4} \le x < 0$ و $\sqrt[3]{5} \le x < \sqrt[3]{11}$.

۱۵) برای حقیقی بودن $\sqrt{x - \sqrt{x}}$ باید داشته باشیم:

$$x = 0 \text{ یا } x \ge 1$$

$x = 0$ در معادله صدق نمی‌کند. برای $x \ge 1$ به دست می‌آید:

$$[x] \ge 1 \quad x + [x] \ge 2, \ \sqrt{x + [x]} \ge \sqrt{2}$$

بنابراین مقدار سمت چپ برابری، همیشه از مقدار سمت راست آن بزرگتر است.

پاسخ. معادله جواب ندارد.

۱۶) اگر فرض کنیم $x = k + \alpha$ ($k \in \mathbf{Z}$ و $\circ \le \alpha < ۱$) داریم:

$$\left[x + \frac{۳}{۸}\right] = \left[k + \alpha + \frac{۳}{۸}\right] = k + \left[\alpha + \frac{۳}{۸}\right],$$
$$[x] = [k + \alpha] = k,$$
$$\frac{۷x - ۲}{۳} = \frac{۷k + ۷\alpha - ۲}{۳}$$

که اگر در معادله قرار دهیم، بعد از ساده کردن، چنین می‌شود:

$$۳\left[\alpha + \frac{۳}{۸}\right] = k + ۷\alpha - ۲ \qquad (۱)$$

دو حالت در نظر می‌گیریم:

حالت اول $\alpha < \frac{۵}{۸}$. در این حالت به برابری

$$k = ۲ - ۷\alpha \qquad (۲)$$

می‌رسیم و چون $\circ \le \alpha < \frac{۵}{۸}$، در نتیجه

$$-\frac{۱۹}{۸} < k \le ۲$$

k عددی درست است، بنابراین می‌تواند برابر یکی از عددهای ۲−، ۱−، ۰، ۱ یا ۲ باشد و، برای هر k، از برابری (۲) مقدار α هم به دست می‌آید.

حالت دوم $\frac{۵}{۸} \le \alpha < ۱$. در این حالت، برابری (۱) به صورت

$$k = ۵ - ۷\alpha \qquad (۳)$$

درمی‌آید؛ یعنی با توجه به این که $\frac{۵}{۸} \le \alpha < ۱$، به دست می‌آید:

$$-۲ < k \le \frac{۵}{۸}$$

یعنی k می‌تواند برابر عددهای ۱− و ۰ باشد که، با کمک برابری (۳)، مقدارهای α هم به دست می‌آید.

پاسخ. معادله ۷ ریشه دارد:

$$x_1 = 2,\ x_2 = \frac{8}{7},\ x_3 = \frac{2}{7},\ x_4 = -\frac{4}{7},\ x_5 = -\frac{10}{7},$$
$$x_6 = -\frac{1}{7},\ x_7 = \frac{5}{7}$$

۱۷) می‌دانیم $-1 \leq \sin x \leq 1$ و $-1 \leq \cos x \leq 1$. بنابراین $[\sin x]$ و $[\cos x]$ در سه حالت ممکن است با هم برابر باشند:

الف. وقتی $[\sin x] = -1$ و $[\cos x] = -1$. سینوس و کسینوس یک کمان، تنها وقتی هر دو منفی، یعنی بین صفر و ۱− هستند که انتهای کمان x، در ربع سوم دایره مثلثاتی باشد، یعنی

$$2k\pi + \pi < x < 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$$

ب. وقتی که داشته باشیم $[\sin x] = [\cos x] = 0$. انتهای کمان x در ربع اول دایرهٔ مثلثاتی است:

$$2k\pi < x < 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

ج. وقتی هر دو مقدار $[\sin x]$ و $[\cos x]$ برابر واحد باشند. در این حالت جوابی برای x به دست نمی‌آید (سینوس و کسینوس یک کمان، هرگز از واحد بزرگتر نیستند؛ در ضمن، هر دو با هم نمی‌توانند برابر واحد باشند).

پاسخ. $2k\pi < x < 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ و $2k\pi + \pi < x < 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$ $(k \in \mathbf{Z})$.

۱۸) باید داشته باشیم:

$$۱ \leq \sin x + \cos x < ۲$$

برای این که مجموع $\sin x + \cos x$ از ۱ بزرگتر باشد، باید هم $\sin x$ و هم $\cos x$ مثبت باشند، یعنی انتهای کمان x، در ربع اول دایرهٔ مثلثاتی (با به حساب آوردن دو انتهای این ربع) قرار گیرد.

$$۲k\pi \leq x \leq ۲k\pi + \frac{\pi}{۲}, \ (k \in \mathbf{Z})$$

۱۹) باید داشته باشیم:

$$۰ \leq \sin x + \cos x < ۱ \qquad (۱)$$

روشن است که $\sin x$ و $\cos x$ نمی‌توانند هر دو منفی باشند، زیرا در این صورت، مجموع آن‌ها منفی می‌شود. هر دو مقدار $\sin x$ و $\cos x$، عددی مثبت هم نمی‌توانند باشند، زیرا با فرض $\sin x > ۰$ و $\cos x > ۰$ فرض می‌کنیم:

$$a = \sin x + \cos x \Rightarrow a^۲ = ۱ + ۲ \sin x \cos x > ۱$$

$a^۲$ و در نتیجه a، از واحد بزرگتر می‌شود که با شرط (۱) سازگار نیست.

به این ترتیب، $\sin x$ و $\cos x$، علامت‌های مختلفی دارند؛ در ضمن باید مجموع آن‌ها عددی مثبت باشد، یعنی از دو مقدار $\sin x$ و $\cos x$، آن که قدر مطلقی بزرگتر دارد مثبت است.

پاسخ. اگر انتهای کمان در ربع دوم باشد:

$$۲k\pi + \frac{\pi}{۲} < x \leq ۲k\pi + \frac{۳\pi}{۴}, \ (k \in \mathbf{Z})$$

و اگر انتهای کمان و ربع چهارم دایرهٔ مثلثاتی باشد:

$$۲k\pi + \frac{۷\pi}{۴} \leq x < ۲k\pi + ۲\pi \ (k \in \mathbf{Z})$$

۲۰) پاسخ. $(k \in \mathbf{Z})۲k\pi + \frac{۳\pi}{۴} \leq x < ۲k\pi + \pi$.

۲۱) پاسخ. $(k \in \mathbf{Z})۲k\pi + \pi < x < ۲k\pi + \frac{۳\pi}{۲}$.

۲۲) برای حقیقی بودن رادیکال سمت چپ برابری، باید داشته باشیم:

$$[-۷x^۲ + ۳x + ۴] \geq ۰ \Rightarrow -۷x^۲ + ۳x + ۴ \geq ۰$$

و یا $(۱ - x)(۷x + ۴) \geq ۰$، که از آن‌جا به سادگی به دست می‌آید:

$$-\frac{۴}{۷} \leq x \leq ۱ \qquad (۱)$$

از طرف دیگر، چون $-۱ \leq \sin x \leq ۱$، پس

$$۱ \leq ۲ - \sin x \leq ۳$$

با توجه به نابرابری‌های (۱)، x نمی‌تواند برابر $\frac{\pi}{۲}$ یا $-\frac{\pi}{۲}$ باشد ($\frac{\pi}{۲}$ از ۱/۵ و در نتیجه از ۱ بزرگتر و $-\frac{\pi}{۲}$ از ۱/۵− و در نتیجه از $-\frac{۴}{۷}$ کوچکتر است). بنابراین

$$۱ < ۲ - \sin x < ۳$$

از آن‌جا $[۲ - \sin x]$ تنها مقدارهای ۱ و ۲ را می‌تواند بپذیرد. اگر

$$[-۷x^۲ + ۳x + ۴] = [۲ - \sin x] = ۱$$

آن وقت باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} ۱ \leq -۷x^۲ + ۳x + ۴ < ۲ \\ ۱ \leq ۲ - \sin x < ۲ \end{cases} \qquad (۲)$$

نامعادلهٔ اول دستگاه (۲)، شامل دو نامعادله است:

$$\begin{cases} -۷x^۲ + ۳x + ۴ < ۲ \\ -۷x^۲ + ۳x + ۴ \geq ۱ \end{cases} = \begin{cases} ۷x^۲ - ۳x - ۲ > ۰ \\ ۷x^۲ - ۳x - ۳ \leq ۰ \end{cases}$$

از این دستگاه به دست می‌آید:

$$\frac{۳ + \sqrt{۶۵}}{۱۴} < x \leq \frac{۳ + \sqrt{۹۳}}{۱۴} \qquad (۳)$$

چون $\frac{۳ + \sqrt{۶۵}}{۱۴} \approx ۰/۷۹$ و $\frac{۳ + \sqrt{۹۳}}{۱۴} \approx ۰/۹$ و هر دو عدد، هم در نابرابری‌های (۱) و هم در نابرابری‌های $۲ > [۲ - \sin x] \geq ۱$ صدق می‌کنند، بنابراین، مقدار x که با شرط (۳) معین شده است، جواب دستگاه (۲) است. اکنون فرض می‌کنیم:

$$[-۷x^۲ + ۳x + ۴] = ۴ \text{ و } [۲ - \sin x] = ۲$$

که منجر به دستگاه نامعادله‌های زیر می‌شود:

$$\begin{cases} ۴ \leq -۷x^۲ + ۳x + ۴ < ۵ \\ ۲ \leq ۲ - \sin x < ۳ \end{cases} \qquad (۴)$$

در آغاز به نامعادله‌های جبری دستگاه (۴) می‌پردازیم:

$$\begin{cases} -۷x^۲ + ۳x - ۱ < ۰ \\ -۷x^۲ + ۳x \geq ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -۷\left(x - \frac{۳}{۱۴}\right)^۲ - \frac{۱۸۷}{۱۹۶} < ۰ \\ x(-۷x + ۳) \geq ۰ \end{cases}$$

نامعادلهٔ اول دستگاه اخیر همیشه برقرار است و نامعادلهٔ دوم آن، به جواب

$$۰ \leq x \leq \frac{۳}{۷}$$

می‌رسد. ولی اگر $x > ۰$، آن وقت $\sin x > ۰$ و $۲ - \sin x < ۲$؛ در نتیجه برابری $[۲ - \sin x] = ۲$ نقض می‌شود. تنها $x = ۰$ در نامعادله‌های دوم دستگاه (۴) صدق می‌کند.

پاسخ. $x = ۰$ و $\frac{۳ + \sqrt{۶۵}}{۱۴} < x \leq \frac{۳ + \sqrt{۹۳}}{۱۴}$.

۱۲۳. ۱) $[x] < ۲$، به معنای $x < ۲$ است، یعنی x می‌تواند هر عدد کوچکتر از ۲ باشد (مثبت، منفی یا صفر)؛

۲) پاسخ. $x < ۳$؛ ۳) $x \geq ۳$؛ ۴) $x \geq ۲$.

۵) عبارت سمت چپ نامعادله، قابل تجزیه است:

$$([x] + ۱)([x] - ۶) < ۰ \Rightarrow -۱ < [x] < ۶$$

از آن‌جا $۰ \leq x < ۶$؛ ۶) $x < ۲$ یا $x \geq ۲$؛ ۷) عبارت سمت چپ برابری را در نامعادله، تجزیه می‌کنیم:

$$(\{x\} - ۲)\left(\{x\} - \frac{۱}{۲}\right) < ۰$$

چون $۰ \leq \{x\} < ۱$، پس $۲ - \{x\} > ۰$. بنابراین، باید پرانتز دوم مثبت باشد:

$$\{x\} - \frac{۱}{۲} > ۰ \Rightarrow \{x\} > \frac{۱}{۲}$$

پاسخ. $n + \frac{۱}{۲} < x < n + ۱$ $(n \in \mathbf{Z})$.

۱۲۴.

۱) پاسخ. $۱ \leq x < ۲$ و $۲ \leq y < ۳$؛

۲) $x = k + \frac{۵}{۷}$ و $y = k + \frac{۱}{۷}$ $(k \in \mathbf{Z})$،

۳) راهنمایی. $[x + y + ۴]$، $[x + ۱]$ و $[۱ - y]$ عددهایی درست‌اند، بنابراین $۱۸ - y$ و $۱۸ - x - y$ و در نتیجه x و y عددهایی درست‌اند و

داریم:

$$[x+y+۴]=x+y+۴,\ [x+۱]=x+۱,\ [y-۱]=y-۱$$

پاسخ. $x=۴$، $y=۵$.

۴) x و y عددهای درست‌اند (چرا؟) و دستگاه به این صورت درمی‌آید:

$$۲x+y=۷ \text{ و } ۲x+y=۳$$

دو معادلهٔ دستگاه با هم ناسازگارند. دستگاه جوابی ندارد.

۱۲۵. طول راه را x کیلومتر می‌گیریم. چون بعد از پیمودن هر ۴ کیلومتر، استراحت می‌کند، بنابراین تعداد استراحت‌های او برابر $\left[\frac{x}{۴}\right]$ می‌شود. یکی از این توقف‌ها یک ساعت و بقیه هر کدام $\frac{۱}{۶}$ ساعت (۱۰ دقیقه) طول می‌کشد، یعنی میزان استراحت او، بر حسب ساعت برابر است با

$$۱+\frac{۱}{۶}\left(\left[\frac{x}{۴}\right]-۱\right)=\frac{۵}{۶}+\frac{۱}{۶}\left[\frac{x}{۴}\right]$$

پیاده از ۴ صبح تا ۱۲ ظهر در راه بوده (روی هم ۸ ساعت). اگر زمان توقف او را کنار بگذاریم، به اندازهٔ

$$۸-\left(\frac{۵}{۶}+\frac{۱}{۶}\left[\frac{x}{۴}\right]\right)=\frac{۴۳}{۶}-\frac{۱}{۶}\left[\frac{x}{۴}\right] \quad (\text{ساعت})$$

راه رفته است. سرعت پیاده ۵ کیلومتر در ساعت است. به این معادله می‌رسیم:

$$x=۵\left(\frac{۴۳}{۶}-\frac{۱}{۶}\left[\frac{x}{۴}\right]\right)\Rightarrow\left[\frac{x}{۴}\right]=\frac{۲۱۵-۶x}{۵}$$

از این‌جا، به این دستگاه می‌رسیم:

$$\begin{cases} \frac{x}{۴} < \frac{۲۱۵ - ۶x}{۵} + ۱ \\ \frac{x}{۴} \geq \frac{۲۱۵ - ۶x}{۵} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲۹x < ۸۸۰ \\ ۲۹x \geq ۸۶۰ \end{cases}$$

که از آن‌جا به دست می‌آید:

$$\frac{۸۶۰}{۲۹} \leq x < \frac{۸۸۰}{۲۹} \Rightarrow ۲۹/۶\ldots \leq x < ۳۰/۳\ldots$$

و چون x عدد درستی است، بنابراین $x = ۳۰$.

۱۲۶. ۱) تابع $y = \{x\}$ را می‌توان به صورت $y = x - [x]$ نوشت. مقدار y را در چند فاصله پیدا می‌کنیم:

$$۰ \leq x < ۱ \Rightarrow y = x$$

در واقع، وقتی $۰ \leq x < ۱$، آن وقت $[x] = ۰$ و $y = x$. به این ترتیب، نمودار تابع $y = \{x\}$، در این فاصله، پاره‌خط راستی است روی نیمساز ربع اول که از مبداء مختصات آغاز می‌شود تا نقطهٔ $(۱, ۱)$ ادامه دارد. مبداء مختصات به نمودار تعلق دارد، ولی نقطهٔ $(۱, ۱)$ جزو نمودار نیست. طول این پاره‌خط راست برابر $\sqrt{۲}$ است. به همین ترتیب:

$$۱ \leq x < ۲ \Rightarrow y = x - ۱$$

پاره‌خط راستی موازی نیمساز ربع اول که از نقطهٔ $(۱, ۰)$ آغاز می‌شود و در نقطهٔ $(۲, ۱)$ پایان می‌یابد. آغاز این پاره‌خط راست جزو نمودار است و پایان آن به نمودار تعلق ندارد.

$$-۱ \leq x < ۰ \Rightarrow y = x + ۱$$

پاره‌خط راستی با آغاز $(-۱, ۰)$ و پایان $(۰, ۱)$. نقطهٔ آغاز جزو نمودار است، ولی انجام آن به نمودار تعلق ندارد.

به طور کلی، اگر $n \in \mathbf{Z}$، آن وقت

$$n \leq x < n + ۱ \Rightarrow y = x + n$$

نمودار $y = \{x\}$ را در شکل ۷۵ می‌بینید.

یادداشت. در تابع $y = x - [x]$، اگر x را به $x + n$ تبدیل کنیم $(n \in \mathbf{Z})$، مقدار y تغییر نمی‌کند:

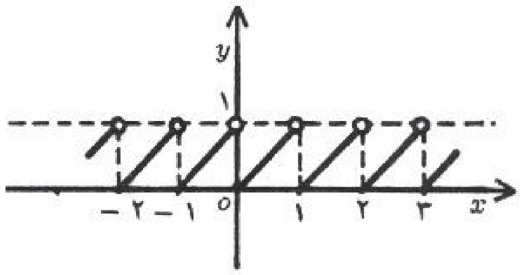
$$y_۱ = (x + n) - [x + n] = (x + n) - [x] - n =$$
$$= x - [x] = y$$

چنین تابعی را در ریاضیات، **تابع متناوب** و n را **دورهٔ تناوب** آن گویند. در تابع $y = x - [x]$، عدد ۱، کوچکترین دورهٔ تناوب مثبت تابع است که به آن، دورهٔ تناوب اصلی، یا اغلب به طور ساده، دورهٔ تناوب گویند.

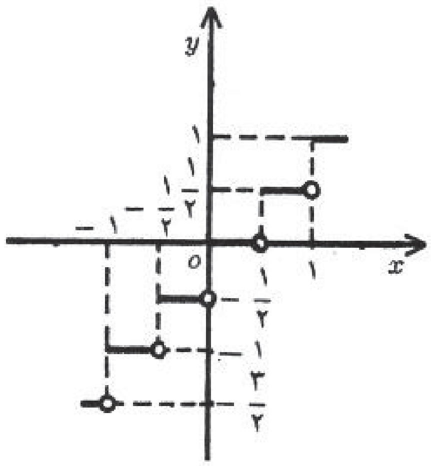
به طور کلی، T را برای تابع $y = f(x)$، دورهٔ تناوب گویند، به شرطی که داشته باشیم:

$$f(x + T) = f(x)$$

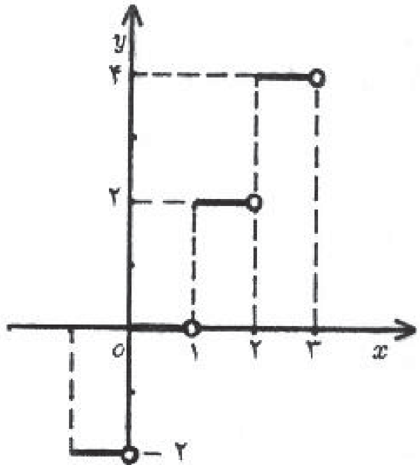
اگر تابع $y = f(x)$ تابعی متناوب با دورهٔ تناوب T باشد، برای رسم نمودار آن، کافی است نمودار تابع را، برای $۰ \leq x \leq T$ رسم کنیم. اگر این نمودار را در فاصله‌های $T \leq x \leq ۲T$ یا $-T \leq x \leq ۰$ و غیره تکرار کنیم، نمودار تابع $y = f(x)$ به دست می‌آید (فصل آخر همین کتاب، دربارهٔ رسم تابع‌های سادهٔ مثلثاتی را ببینید).



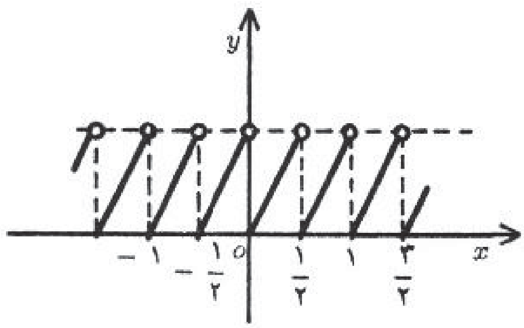
شکل ۷۵: $y = \{x\}$



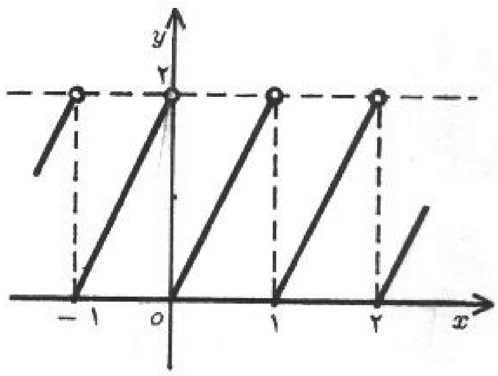
شکل ۷۶: $y = [۲x]$



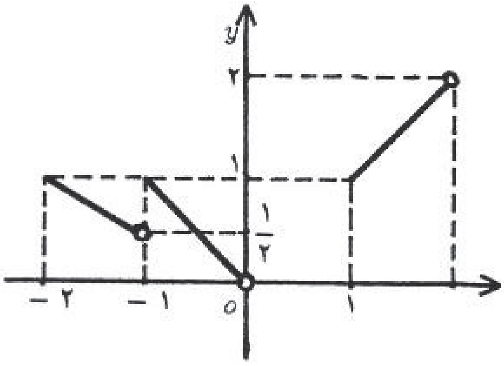
شکل ۷۷: $y = ۲[x]$



شکل ۷۸: $y = \{۲x\}$



شکل ۷۹: $y = ۲\{x\}$



شکل ۸۰: $y = \dfrac{x}{[x]}$

۲) شبیه نمودار تابع $y = [x]$ رسم می‌شود؛ البته در این‌جا، باید تغییر x را، در فاصله‌هایی برابر $\frac{۱}{۲}$ در نظر گرفت:

$$-\frac{۱}{۲} \leq x < ۰ \Rightarrow y = -۱$$

$$۰ \leq x < \frac{۱}{۲} \Rightarrow y = ۰$$

$$\frac{۱}{۲} \leq x < ۱ \Rightarrow y = ۱$$

بخشی از نمودار تابع $y = [۲x]$ را در شکل ۷۶ می‌بینید.

۳) شکل ۷۷ را ببینید.

۴) شیوهٔ عمل شبیه $y = \{x\}$ است؛ تنها تفاوت در این است که، در تابع $y = \{۲x\}$، باید فاصلهٔ تغییر x را از صفر تا $\frac{۱}{۲}$ یا از $\frac{۱}{۲}$ یا ۱ و غیره انتخاب کرد. نمودار را در شکل ۷۸ می‌بینید.

۵) نمودار $y = ۲\{x\}$ در شکل ۷۹ داده شده است.

۶) تابع برای $x \geq ۱$ و $x < ۰$ معین است، زیرا مخرج کسر، یعنی $[x]$، برای $۰ \leq x < ۱$، برابر صفر می‌شود. داریم:

$$-۲ \leq x < -۱ \Rightarrow y = -\frac{۱}{۲}x;$$

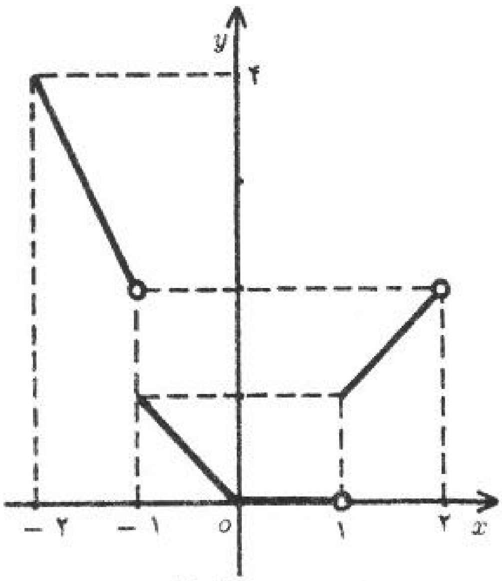
$$-۱ \leq x < ۰ \Rightarrow y = -x;$$

$$۱ \leq x < ۲ \Rightarrow y = x$$

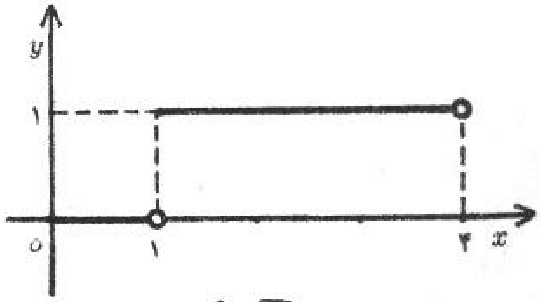
نمودار تابع، در فاصله $-۲ \leq x < ۲$ در شکل ۸۰ داده شده است.

توجه کنید: اگر n عددی درست و مخالف صفر باشد، در حالت کلی داریم:

$$n \leq x < n + ۱ \Rightarrow y = \frac{۱}{n}x$$



شکل ۸۲: $y = x[x]$



شکل ۸۱: $y = [\sqrt{x}]$

۷) روشن است که x نمی‌تواند عددی منفی باشد. داریم:

$$۰ \leq \sqrt{x} < ۱ \Rightarrow ۰ \leq x < ۱ \Rightarrow y = ۰;$$

$$۱ \leq \sqrt{x} < ۲ \Rightarrow ۱ \leq x < ۴ \Rightarrow y = ۱$$

نمودار تابع $y = [\sqrt{x}]$ را در فاصله $۰ \leq x < ۴$ در شکل ۸۱ می‌بینید.

۸) داریم:

$$-۲ \leq x < -۱ \Rightarrow y = -۲x$$

$$-۱ \leq x < ۰ \Rightarrow y = -x$$

$$۰ \leq x < ۱ \Rightarrow y = ۰$$

$$۱ \leq x < ۲ \Rightarrow y = x$$

نمودار تابع را در شکل ۸۲ ببینید.

۱۲۷. n یا زوج است و یا فرد. در هر حالت درستی برابری را آزمایش می‌کنیم:

الف) $n = ۲k$ (k، عددی طبیعی است). داریم:

$$\left[\frac{n}{۲}\right] + \left[\frac{n+۱}{۲}\right] = [k] + \left[k + \frac{۱}{۲}\right] = ۲k = n$$

ب) $n = ۲k + ۱$ ($k \in \mathbf{N}$). به دست می‌آید:

$$\left[\frac{n}{۲}\right] + \left[\frac{n+۱}{۲}\right] = \left[k + \frac{۱}{۲}\right] + [k+۱] = ۲k + ۱ = n$$

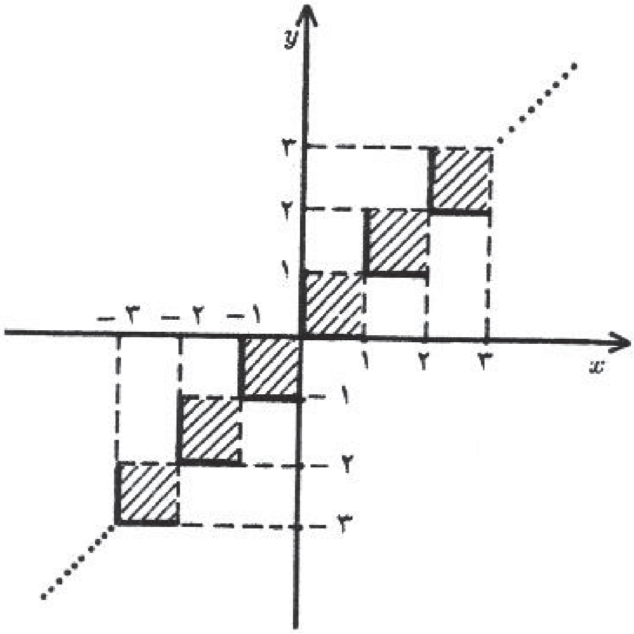
۱۲۸. اگر داشته باشیم: $n \leq x < n + ۱$، به دست می‌آید:

$$[y] = n \Rightarrow n \leq y < n + ۱$$

به این ترتیب:

$$-۲ \leq x < -۱ \Rightarrow -۲ \leq y < -۱;$$
$$-۱ \leq x < ۰ \Rightarrow -۱ \leq y < ۰;$$
$$۰ \leq x < ۱ \Rightarrow ۰ \leq y < ۱;$$
$$۱ \leq x < ۲ \Rightarrow ۱ \leq y < ۲$$

مجموعهٔ نقطه‌های (x, y)، در صفحهٔ محورهای مختصات، به صورت زنجیره‌ای از مربع‌های به ضلع برابر واحد (شکل ۸۳) درمی‌آیند. نقطه‌های واقع در درون مربع‌ها و نقطه‌های واقع بر ضلع‌های سمت چپ و پایین هر مربع به مجموعه تعلق دارند، در حالی که، نقطه‌های واقع بر ضلع‌های بالا و سمت راست هر مربع، عضو این مجموعه نیستند.در شکل ۸۳، ضلع‌هایی از مربع‌ها را که، نقطه‌های واقع بر آن‌ها، متعلق به مجموعه نیستند، به صورت نقطه‌چین نشان داده‌ایم.



شکل ۸۳: $[y] = [x]$

تعمیم مفهوم توان و تابع نمایی

۱۲۹. پاسخ‌ها. ۱) $(a+b)^{\frac{7}{4}} \cdot c^{\frac{4}{3}} \cdot d^{-\frac{3}{5}} \cdot (a+x)^{-\frac{1}{4}}$

۲) $(a^2 - x^2)^{\frac{1}{4}} \cdot a^{-\frac{1}{2}} \cdot m^{-\frac{5}{6}}$.

۱۳۰. پاسخ‌ها. ۱) $2ac^2\sqrt[5]{a^3b^3}$، ۲) $2|a|cd^3\sqrt[4]{a^2d^3}$؛

۳) $\dfrac{3xy\sqrt[3]{y^2}}{5a^2b}$؛ ۴) $x^2\sqrt[n]{3x}$ (پاسخ در هر دو حالتی که $n \neq 0$، زوج یا فرد باشد، درست است؛ تنها در حالت زوج بودن n، مقدار x باید مثبت باشد).

۱۳۱. ۱) داریم:

$$(1/5)^3 \cdot (2/25)^{1/5} \cdot (0/75)^{-3} =$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)^3 \left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{-3} = \frac{27}{8} \times \frac{27}{8} \times \left(\frac{4}{3}\right)^3 =$$

$$= \frac{27 \times 27}{64} \times \frac{64}{27} = 27;$$

$$۲)\ (۲/۲)^{-۲}(۷/۵)^{-۲}\cdot\left(\frac{۱۱}{۲۰}\right)^{۲}\cdot\left(\frac{۱}{۳}\right)^{-۲}=$$

$$=\frac{۱}{\left(\frac{۱۱}{۵}\right)^{۲}}\cdot\frac{۱}{\left(\frac{۳\times۵}{۲}\right)^{۲}}\cdot\left(\frac{۱۱}{۲^{۲}\times۵}\right)^{۲}\cdot۳^{۲}=$$

$$=\frac{۵^{۲}}{۱۱^{۲}}\times\frac{۲^{۲}}{۳^{۲}\times۵^{۲}}\times\frac{۱۱^{۲}}{۲^{۴}\times۵^{۲}}\times۳^{۲}=$$

$$=\frac{۲^{۲}\times۳^{۲}\times۵^{۲}\times۱۱^{۲}}{۲^{۴}\times۳^{۲}\times۵^{۴}\times۱۱^{۲}}=\frac{۱}{۲^{۲}\times۵^{۲}}=۰/۰۱;$$

$$۳)\ ۴۲^{\frac{۱}{۲}}\cdot۴۹^{\frac{۱}{۶}}\cdot۴۹^{\frac{۱}{۴}}\cdot۱۹۶^{\frac{۱}{۳}}=$$

$$=\sqrt{۷\times۶}\cdot\sqrt[۶]{۷^{۲}}\cdot\sqrt[۴]{۷^{۲}}\cdot\sqrt[۳]{۷^{۳}\times۲^{۲}}=$$

$$\sqrt{۷\times۶}\times\sqrt[۳]{۷}\times\sqrt{۷}\times\sqrt[۳]{۷^{۲}\times۲^{۲}}=$$

$$=(\sqrt{۷\times۶}\times\sqrt{۷})(\sqrt[۳]{۷}\times\sqrt[۳]{۷^{۲}\times۲^{۲}}=$$

$$=۷\sqrt{۲\times۳}\times۷\sqrt[۳]{۲^{۲}}=۴۹\sqrt{۳\times۲}\times\sqrt[۳]{۲^{۲}}=$$

$$=۴۹\sqrt[۶]{۳^{۳}\times۲^{۳}}\times\sqrt[۶]{۲^{۴}}=۴۹\sqrt[۶]{۳^{۳}\times۲^{۷}}=۹۸\sqrt[۶]{۵۴};$$

$$۴)\ \frac{\sqrt{۱۲}}{\sqrt{۳}}+\frac{\sqrt{۱۵۳}}{\sqrt{۱۷}}+\frac{\sqrt{۳۰۴}}{\sqrt{۱۹}}+\frac{\sqrt{۱۳۳۱}}{\sqrt{۱۱}}=$$

$$=\frac{\sqrt{۳\times۴}}{\sqrt{۳}}+\frac{\sqrt{۹\times۱۷}}{\sqrt{۱۷}}+\frac{\sqrt{۱۶\times۱۹}}{\sqrt{۱۹}}+\frac{\sqrt{۱۲۱\times۱۱}}{\sqrt{۱۱}}=$$

$$\sqrt{۴}+\sqrt{۹}+\sqrt{۱۶}+\sqrt{۱۲۱}=۲+۳+۴+۱۱=۲۰;$$

$$۵)\ \frac{a^{-۱}-n^{-۲}}{a^{-\frac{۱}{۴}}-n^{-\frac{۱}{۲}}}\times\frac{a^{\frac{۱}{۴}}-n^{\frac{۱}{۲}}}{a^{\frac{۱}{۴}}\cdot n^{\frac{۱}{۲}}}=$$

$$= \frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{\sqrt[4]{a}} - \frac{1}{\sqrt{n}}} \times \frac{\sqrt[4]{a} - \sqrt{n}}{\sqrt[4]{a} \cdot \sqrt{n}} = \frac{\sqrt[4]{a} \cdot \sqrt{n}(n^2 - a)}{an^2(\sqrt{n} - \sqrt[4]{a})} \times$$

$$\times \frac{\sqrt[4]{a} - \sqrt{n}}{\sqrt[4]{a} \cdot \sqrt{n}} = \frac{a - n^2}{an^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{a}$$

۱۳۲. *پاسخ‌ها.* ۱) $a > b$؛ ۲) $a < b$؛ ۳) $a > b$.

۱۳۳. ۱) چون پایه‌ها در دو طرف معادله، با هم برابرند، برابری وقتی برقرار است که یا در هر دو طرف معادله، نماها برابر یکدیگر باشند و یا هر دو نما با هم برابر صفر شوند. حالت دوم ممکن نیست (x و $x^2 - 2$ نمی‌توانند، هم زمان، برابر صفر شوند). بنابراین، باید داشته باشیم $x = x^2 - 2$.

پاسخ. $x_1 = -1$ و $x_2 = 2$.

۲) چون $\frac{49}{4} = \left(\frac{2}{7}\right)^{-2}$، به این معادله می‌رسیم:

$$\left(\frac{2}{7}\right)^{3x-4} = \left(\frac{2}{7}\right)^{-2x+2} \Rightarrow 3x - 4 = -2x + 2$$

پاسخ. $x = \frac{6}{5}$.

۳) معادله، بعد از ساده کردن، به صورت $5^{2x} = 7^{3x}$ درمی‌آید.

پاسخ. $x = 0$.

۴) به این برابری‌ها توجه کنید:

$$3^{2x+3} = 27 \times 3^{2x};\ 6 \times 4^{x+1} = 24 \times 2^{2x};$$
$$\frac{2}{3} \times 9^{x+1} = \frac{2}{3} \times 3^{2x+2} = \frac{2}{3} \times 9 \times 3^{2x} = 6 \times 3^{2x}$$

و معادله، سرانجام، به صورت $2^{2x} = 3^{2x}$ درمی‌آید.

پاسخ. $x = 0$.

۵) معادله، به این صورت درمی‌آید:

$$2^{12(x^3+8)} = 2^{28(x^2+2x)}$$

از آن‌جا، با برابر قرار دادن نماها، به این معادله می‌رسیم:

$$3x^3 - 7x^2 - 14x + 24 = 0$$

عبارت سمت چپ برابری قابل تجزیه است:

$$3x^3 - 7x^2 - 14x + 24 = (3x^3 + 24) - (7x + 14) =$$
$$= 3(x+2)(x^2 - 2x + 4) - 7(x+2) =$$
$$= (x+2)(3x^2 - 6x + 5)$$

پاسخ. $x = -2$.

۶) معادلهٔ مفروض، به این صورت درمی‌آید:

$$2^{15(x^3+8)} = 2^{57(2x+x^2)}$$

از آن‌جا به این معادله می‌رسیم:

$$5(x^3 + 8) = 19(2x + x^2)$$

هر طرف برابری را تجزیه می‌کنیم:

$$5(x+2)(x^2 - 2x + 4) = 19x(x+2)$$

که به سادگی قابل حل است.

پاسخ. $x_1 = -۲$، $x_۲ = \frac{۴}{۵}$، $x_۳ = ۵$.

۷) معادله را تبدیل می‌کنیم:

$$۲^{۱۲x+۱} - ۲^{۱۲x-۲} + ۲^{۱۲x-۳} = ۷۶۸۰;$$
$$۲ \times ۲^{۱۲x} - \frac{۱}{۴} \times ۲^{۱۲x} + \frac{۱}{۸} \times ۲^{۱۲x} = ۷۶۸۰;$$
$$\frac{۱۵}{۸} \times ۲^{۱۲x} = ۲^{۹} \times ۱۵;\ ۲^{۱۲x} = ۲^{۱۲};\ x = ۱$$

۸) دو کسر اول و سوم را با هم جمع می‌کنیم؛ درضمن $t = ۲^x$ گرفته‌ایم:

$$\frac{۹}{۱۷(۴t-۳)} + \frac{۲}{۱۷(t-۵)} = \frac{۹(t-۵)+۲(۴t-۳)}{۱۷(۴t-۳)(t-۵)} =$$
$$= \frac{۱۷(t-۳)}{۱۷(۴t-۳)(t-۵)} = \frac{t-۳}{(۴t-۳)(t-۵)}$$

بنابراین، به معادلهٔ زیر می‌رسیم:

$$\frac{t-۳}{(۴t-۳)(t-۵)} = \frac{۱}{۴\left(t-\frac{۱}{۲}\right)}$$

که از آن به دست می‌آید: $t = ۱$.

پاسخ. $x = ۰$.

۹) راهنمایی. $t = ۲^{\sqrt{۳x^۲-۲x}}$ بگیرید. معادلهٔ مفروض، منجر به حل دو معادلهٔ زیر می‌شود:

$$\sqrt{۳x^۲ - ۲x} = ۰ \text{ و } \sqrt{۳x^۲ - ۲x} = ۳$$

پاسخ. $x_۱ = ۰$، $x_۲ = \frac{۲}{۳}$، $x_{۳,۴} = \frac{۱}{۳}(۱ \pm ۲\sqrt{۷})$

۱۰) $\sqrt[3]{۳+۲\sqrt{۲}}$ و $\sqrt[3]{۳-۲\sqrt{۲}}$ عکس یکدیگرند، زیرا

$$\sqrt[3]{۳+۲\sqrt{۲}} \times \sqrt[3]{۳-۲\sqrt{۲}} = \sqrt[3]{۹-۸} = ۱$$

بنابراین، با فرض $\left(\sqrt[3]{۳+۲\sqrt{۲}}\right)^x = t$، به دست می‌آید:

$$t + \frac{۱}{t} = ۲ \Rightarrow (t-۱)^۲ = ۰ \Rightarrow t = ۱$$

پاسخ. $x = ۰$.

۱۱) معادله را می‌توان این طور نوشت:

$$x^{\frac{۱}{۳}x} = x^{\sqrt[3]{x}}$$

یاباید $x = ۱$ ویا $\frac{۱}{۳}x = \sqrt[3]{x}$ ($x = ۰$ جواب‌معادله نیست: $۰^۰$ معنا ندارد).

پاسخ. $x = ۱$ و $x = ۳\sqrt{۳}$ (در تابع نمایی، پایه، مقداری مثبت است).

۱۲) پاسخ. $x = ۲$.

۱۳) منجر به حل معادلهٔ $۲|۱ - ۲x| = ۳x - ۴$ می‌شود.

پاسخ. $x = -۲$ و $x = \frac{۶}{۷}$.

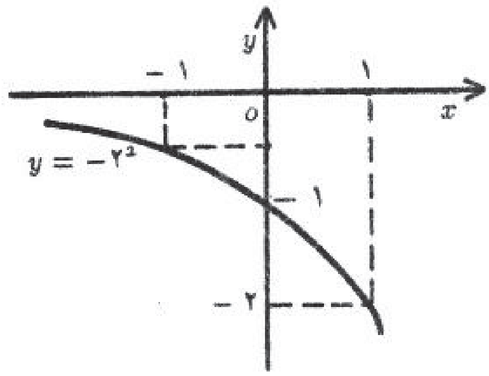
۱۴) *راهنمایی.* منجر به حل این معادله‌ها می‌شود ($x^۲ - x + ۱$ نمی‌تواند برابر صفر شود):

$$x^۲ - x + ۱ = ۱ \text{ و } \frac{x^۲+۱}{۲} = ۲x + ۳$$

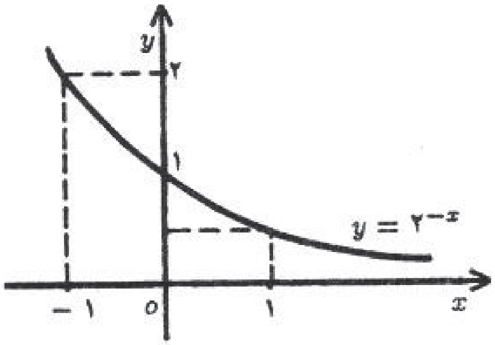
پاسخ. $x_۱ = ۰$، $x_۲ = ۱$، $x_{۳,۴} = ۲ \pm ۲\sqrt{۶}$

۱۵) اگر $|x - ۱| = ۱$، آن‌وقت $x = ۰$ یا $x = ۲$؛

$|x - ۱|$ را نمی‌توان برابر صفر قرار داد، زیرا در این صورت $x^۲ + x - ۲$ هم برابر صفر می‌شود و $۰^۰$ معنی ندارد؛



شکل ۸۴



شکل ۸۵

اگر $x^۲ + x - ۲ = ۳x + ۱۰$، آن وقت $x = ۱ \pm \sqrt{۱۳}$.

۱۶) اگر دو طرف برابری را بر ۵^x تقسیم کنیم، به این معادله می‌رسیم:

$$\left(\frac{۳}{۵}\right)^x + \left(\frac{۴}{۵}\right)^x = ۱$$

α را زاویه‌ای حاده، به سینوس برابر $\frac{۳}{۵}$ می‌گیریم، در این صورت $\cos\alpha$ برابر $\frac{۴}{a}$ می‌شود و به دست می‌آید:

$$(\sin\alpha)^x + (\cos\alpha)^x = ۱$$

که تنها به‌ازای $x = ۲$ برقرار است ($\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha = ۱$).

پاسخ. $x = ۲$.

۱۳۴. دو تابع $y = ۲^{-x}$ و $y = \left(\frac{۱}{۲}\right)^x$ یکی هستند. نمودارهای دو تابع $y = -۲^x$ و $y = ۲^{-x}$ در شکل‌های ۸۴ و ۸۵ داده شده است.

دنباله‌های عددی و تصاعدها

۱۳۵. تصاعد حسابی اول را با جملهٔ اول a و قدر نسبت d و تصاعد دوم را با جملهٔ اول b و قدر نسبت $d_۱$ در نظر می‌گیریم. جمله‌های nام،

برای این تصاعدها، چنین است:

$$a + (n - ۱)d \text{ و } b + (n - ۱)d_۱$$

که تفاضل آن‌ها برابر است با

$$(a - b) + (n - ۱)(d - d_۱)$$

یعنی اگر جمله‌های تصاعد دوم را از جمله‌های نظیر خود در تصاعد اول کم کنیم، یک تصاعد حسابی تازه به دست می‌آید که جملهٔ اول آن $(a - b)$ و قدر نسبت آن $(d - d_۱)$ است.

۱۳۶. صورت کسر مجموع ۵ جمله از یک تصاعد هندسی با جملهٔ اول ۱ و قدر نسبت $x^۲$، و مخرج کسر مجموع ۵ جمله از یک تصاعد هندسی با جملهٔ اول ۱ و قدر نسبت x است. بنابراین

$$\text{صورت کسر} = \frac{(x^۲)^۵ - ۱}{x^۲ - ۱} = \frac{x^{۱۰} - ۱}{x^۲ - ۱};$$

$$\text{مخرج کسر} = \frac{x^۵ - ۱}{x - ۱};$$

$$y = \frac{x^{۱۰} - ۱}{x^۲ - ۱} : \frac{x^۵ - ۱}{x - ۱} = \frac{(x^۵ + ۱)(x^۵ - ۱)}{(x + ۱)(x - ۱)} \times \frac{x - ۱}{x^۵ - ۱} =$$

$$= \frac{x^۵ + ۱}{x + ۱} = x^۴ - x^۳ + x^۲ - x + ۱ =$$

$$= (x^۴ + x^۲ + ۱) - (x^۳ + x) =$$

$$= (۰/۰۰۰۰۰۰۱۶ + ۰/۰۰۰۴ + ۱) - (۰/۰۰۰۰۰۸ + ۰/۰۲) =$$

$$= ۱/۰۰۰۴۰۰۱۶ - ۰/۰۲۰۰۰۸ = ۰/۹۸۰۳۹۲۱۶ \approx ۰/۹۸$$

یادداشت. برای $x = ۰/۰۲$، مقدار $x^۵$ عددی بسیار کوچک است و،

در برابر عدد ۱ می‌توان از آن صرف‌نظر کرد. بنابراین

$$\frac{x^{۵}+۱}{x+۱} \approx \frac{۱}{x+۱} = \frac{۱}{۱/۰۲} = \frac{۵۰}{۵۱} \approx ۰/۹۸$$

۱۳۷. در یادداشتی که در §۳، بعد از دستور مربوط به جملهٔ nام تصاعد هندسی آوردیم، یادآوری کردیم که، در گذار از تصاعد حسابی به تصاعد هندسی، عمل‌های جمع و تفریق، به ضرب و تقسیم و عمل‌های ضرب و تقسیم، به توان و ریشگی تبدیل می‌شوند. مجموع n جملهٔ تصاعد حسابی، با یکی از این دو دستور به دست می‌آید:

$$S_n = \frac{n}{۲}(a_۱ + a_n) \text{ یا } S_n = \frac{n}{۲}[۲a_۱ + (n-۱)d]$$

در دستور اول $a_۱ + a_n$ را به $a_۱a_n$ تبدیل می‌کنیم و به جای ضرب در $\frac{n}{۲}$، به توان $\frac{n}{۲}$ می‌رسانیم، نخستین دستور برای حاصل ضرب n جملهٔ تصاعد هندسی (به جای مجموع n جملهٔ تصاعد حسابی) به دست می‌آید (P_n، به معنای حاصل ضرب n جمله از تصاعد هندسی است):

$$P_n = (a_۱a_n)^{\frac{n}{۲}}$$

در دستور دوم هم، S_n به P_n، $۲a_۱$ به $a_۱^۲$، $(n-۱)d$ به $q^{n-۱}$، علامت جمع داخل کروشه به علامت ضرب و، سرانجام، ضرب در $\frac{n}{۲}$ به صورت توان با نمای $\frac{n}{۲}$ تبدیل می‌شود:

$$P_n = (a_۱^۲ \cdot q^{n-۱})^{\frac{n}{۲}} = a_۱^n \cdot q^{\frac{n}{۲}(n-۱)}$$

البته، به طور مستقیم هم می‌توان به این دستورها رسید. داریم:

$$P_n = a_۱ \cdot a_۱q \cdot a_۱q^۲ \ldots a_۱q^{n-۱} =$$

$$= a_1^n(q \cdot q^2 \ldots q^{n-1}) = a_1^n \cdot q^{1+2+\ldots+(n-1)} =$$
$$= a_1^n q^{\frac{n}{2}(n-1)}$$

۱۳۸. طبق فرض: $u_{n+1} - u_n = 2n$. در این برابری، n را به ترتیب، برابر عددهای درست از ۰ تا $n - 1$ قرار می‌دهیم:

$$n = 0: \quad u_1 - u_0 = 0$$
$$n = 1: \quad u_2 - u_1 = 2$$
$$n = 2: \quad u_3 - u_2 = 4$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$n \to n - 1 \quad u_n - u_{n-1} = 2(n - 1)$$

از مجموع این برابری‌ها به دست می‌آید:

$$u_n - u_0 = 2 + 4 + 6 + \ldots + 2(n - 1) =$$
$$= 2[1 + 2 + 3 + \ldots + (n - 1)] = 2 \times \frac{n}{2}(n - 1) = n(n - 1)$$

و چون $u_0 = 1$، در نتیجه

$$u_n = n^2 - n + 1$$

۱۳۹. داریم:

$$y_n = 2^n,\ y_{n+1} = 2^{n+1},\ y_{n+2} = 2^{n+2}$$

بنابراین

$$y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = 2^{n+2} - 3 \times 2^{n+1} + 2^{n+1} =$$
$$= 2^{n+1}(2 - 3 + 1) = 2^{n+1} \times 0 = 0$$

۱۴۰. الف) برابری فرض، به این صورت درمی‌آید:

$$q^{n+۲} - ۵q^{n+۱} + ۶q^n = ۰ \Rightarrow q^n(q^۲ - ۵q + ۶) = ۰$$

q مخالف صفر است، بنابراین

$$q^۲ - ۵q + ۶ = ۰ \Rightarrow q = ۲ \text{ یا } q = ۳$$

بنابراین، دنبالهٔ y_n، یک تصاعد هندسی است که یا جملهٔ اول و قدر نسبتی برابر ۲ و یا جملهٔ اول و قدرنسبتی برابر ۳ دارد:

$$۲, ۲^۲, ۲^۳, \ldots, ۲^n, \ldots;$$
$$۳, ۳^۲, ۳^۳, \ldots, ۳^n, \ldots$$

ب) بله. دنبالهٔ $\{z = A \cdot ۲^n + B \cdot ۳^n\}$، برای عددهای حقیقی A و B، با برابری فرض سازگار است. آزمایش، درستی این حکم را تایید می‌کند:

$$z_{n+۲} = A \cdot ۲^{n+۲} + B \cdot ۳^{n+۲}, z_{n+۱} = A \cdot ۲^{n+۱} + B \cdot ۳^{n+۱};$$
$$z_{n+۲} - ۵z_{n+۱} + ۶z_n = A \cdot ۲^n(۲^۲ - ۵ \times ۲ + ۶) +$$
$$+B \cdot ۳^n(۳^۲ - ۵ \times ۳ + ۶) = A \cdot ۲^n \times ۰ + B \cdot ۳^n \times ۰ = ۰$$

مثلاً دنباله‌های $u_n = ۳^n + ۲^n$ و $v_n = ۳^n - ۲^n$، یعنی دنباله‌های

$$۵, ۱۳, ۳۵, ۹۷, \ldots, ۳^n + ۲^n, \ldots;$$
$$۱, ۵, ۱۹, ۶۵, \ldots, ۳^n - ۲^n, \ldots$$

از جمله دنباله‌هایی هستند که با برابری فرض مساله سازگارند. روشن است که در جملهٔ عمومی دنباله، یعنی $A \cdot ۲^n + B \cdot ۳^n$، هریک از عددهای A یا B (و نه هر دوی آن‌ها) برابر با صفر هم می‌تواند باشد.

۱۴۱. الف) دستور برگشتی، برای دنباله فیبوناچی، روشن است.

$$u_{n+۲} = u_{n+۱} + u_n \qquad (۱)$$

ب) با توجه به فرض $u_۰ = ۰$ و $u_۱ = ۱$ و با توجه به دستور برگشتی (۱)، می‌توان جمله‌های پشت سر هم دنبالهٔ فیبوناچی را نوشت:

$$۰, ۱, ۱, ۲, ۳, ۵, ۸, ۱۳, ۲۱, ۳۴, ۵۵, ۸۹, \ldots$$

ج) در آغاز، تصاعد هندسی $z_n = q^n$ $(q \neq ۰)$ را طوری پیدا می‌کنیم که با دستور برگشتی (۱) سازگار باشد. بنابر دستور (۱)، برای قدر نسبت این تصاعد هندسی باید داشته باشیم:

$$q^{n+۲} = q^{n+۱} + q^n \Rightarrow q^۲ - q - ۱ = ۰$$

از این معادلهٔ درجه دوم، برای q، دو جواب به دست می‌آید:

$$q_۱ = \frac{۱ + \sqrt{۵}}{۲},\ q_۲ = \frac{۱ - \sqrt{۵}}{۲}$$

به‌ازای عددهای حقیقی و دلخواه A و B، دنبالهٔ

$$y_n = A \cdot q_۱^n + Bq_۲^n$$

دنباله‌ای سازگار با شرط (۱) است (مساله ۱۴۰، ب) را ببینید). برای این‌که، دنبالهٔ فیبوناچی به دست آید، باید شرط‌های $y_۰ = ۰$ (به ازای $n = ۰$) و $y_۱ = ۱$ (به ازای $n = ۱$) برقرار باشند که، از آن‌جا، به دست می‌آید:

$$A + B = ۰ \text{ و } Aq_۱ + Bq_۲ = ۱$$

با در دست داشتن $q_۱$ و $q_۲$، مقدارهای A و B، از این دو معادله به دست می‌آیند: $A = \frac{۱}{\sqrt{۵}}$ و $B = -\frac{۱}{\sqrt{۵}}$. در نتیجه، برای جملهٔ عمومی دنبالهٔ فیبوناچی (یعنی برای u_n) به دست می‌آید:

$$u_n = \frac{۱}{\sqrt{۵}}(q_۱^n - q_۲^n)$$

و یا، با قرار دادن مقدارهای $q_۱$ و $q_۲$:

$$u_n = \frac{۱}{\sqrt{۵}}\left[\left(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}\right)^n - \left(\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}\right)^n\right] \qquad (۲)$$

و این، از شگفتی‌های ریاضیات است که جملهٔ عمومی دنباله‌ای که همهٔ جمله‌های آن، عددهای درست‌اند، با عبارتی گنگ و کم و بیش پیچیده بیان می‌شود.

د) داریم:

$$u_{n+۱} \cdot u_{n-۱} - u_n^۲ = \frac{۱}{\sqrt{۵}}(q_۱^{n+۱} - q_۲^{n+۱}) \times$$

$$\times \frac{۱}{\sqrt{۵}}(q_۱^{n-۱} - q_۲^{n-۱}) - \left[\frac{۱}{\sqrt{۵}}(q_۱^n - q_۲^n)\right]^۲ =$$

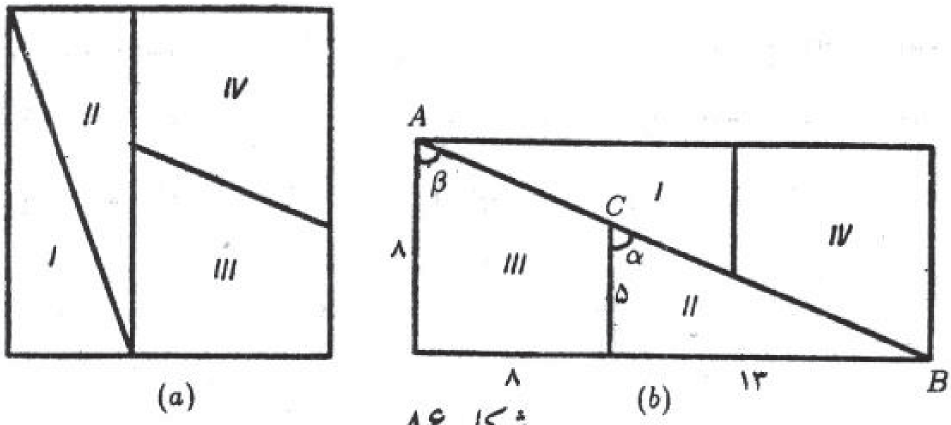
$$= \frac{۱}{۵}(q_۱^{۲n} - q_۱^{n+۱}q_۲^{n-۱} - q_۱^{n-۱}q_۲^{n+۱} + q_۲^{۲n}) -$$

$$-\frac{۱}{۵}(q_۱^{۲n} - ۲q_۱^n q_۲^n + q_۲^{۲n}) =$$

$$= -\frac{۱}{۵}[q_۱^{n-۱}q_۲^{n-۱}(q_۱^۲ + q_۲^۲) - ۲q_۱^n q_۲^n] =$$

$$= -\frac{۱}{۵}\{q_۱^{n-۱}q_۲^{n-۱}[(q_۱ - q_۲)^۲ + ۲q_۱q_۲] - ۲q_۱^n q_۲^n\} =$$

$$= -\frac{۱}{۵}(q_۱ - q_۲)^۲(q_۱q_۲)^{n-۱} =$$



شکل ۸۶

$$= -\frac{۱}{۵}\left(\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲} - \frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}\right)^{۲}\left(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}\cdot\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}\right)^{n-۱} =$$

$$= -\frac{۱}{۵}(\sqrt{۵})^{۲}(-۱)^{n-۱} = (-۱)(-۱)^{n-۱} = (-۱)^{n}$$

تفاضل مورد نظر، در حالت زوج بودن n، برابر ۱+ و در حالت فرد بودن n برابر ۱− است.

***یادداشت**. به این چیستان هندسی توجه کنید:

چیستان. *با مقوا، چهار شکل مسطح بسازید: دو مثلث قائم‌الزاویهٔ برابر، با ضلع‌های مجاور به زاویهٔ قائمهٔ ۱۳ سانتی‌متر و ۵ سانتی‌متر؛ و دو ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه برابر، با قاعده‌های ۸ سانتی‌متر و ۵ سانتی‌متر و ارتفاع برابر ۸ سانتی‌متر. با این چهار تکه مقوا، می‌توان مربعی ساخت (شکل ۸۶ a)؛ ولی با همین چهار تکه مقوا می‌توان یک مستطیل درست کرد (شکل ۸۶ b). مساحت مربع برابر است با $۱۳^{۲}$، یعنی ۱۶۹ سانتی‌متر مربع، در حالی که مساحت مستطیل برابر است با ۸ × ۳۱، یعنی ۱۶۸ سانتی‌متر مربع، آیا ۱۶۸ = ۱۶۹؟*

آشکار کردن راز چیستان دشوار نیست. ما چه کردیم؟ چهار تکهٔ مقوا (که مساحت مربع را پوشانده بودند) در کنار هم قرار دادیم، به چشمان خود اعتماد کردیم و گمان کردیم، مساحت مستطیل را پوشانده‌اند. ولی این، اثبات

نیست. برای اثبات، باید با استدلال ریاضی روشن کنیم، پاره‌خط‌های راست AC و CB در امتداد هم قرار دارند، یعنی AB، یک پاره‌خط راست است. برای این منظور باید برابری دو زاویهٔ α و β ثابت شود. ولی این دو زاویه برابر نیستند، زیرا

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{۱۳}{۵} \text{ و } \mathrm{tg}\beta = \frac{۸}{۳}$$

و $\frac{۸}{۳}$ با $\frac{۱۳}{۵}$ برابر نیست:

$$\frac{۸}{۳} - \frac{۱۳}{۵} = \frac{۱}{۱۵} \Rightarrow \alpha < \beta$$

AB خط راست نیست و در نقطهٔ C شکستگی دارد. مستطیل در طول از A تا B، در بخشی به مساحت ۱ سانتی‌متر مربع، تکه‌های II و III روی تکه‌های IV و I را پوشانده‌اند. ولی چون ۱ سانتی‌متر مربع، در برابر ۱۶۸ سانتی‌متر مربع، مقدار کوچکی است، چشم اشتباه می‌کند و تکه‌های مقوا را طوری می‌بیند که گمان می‌کنیم، AC و CB در امتداد یکدیگرند.

بسیار خوب! ولی این چیستان، چه ربطی به عددهای فیبوناچی دارد؟ در واقع، عددهای ۸ و ۱۳ و ۲۱، که در این چیستان به کار رفته‌اند، سه عدد پشت سر هم از دنبالهٔ فیبوناچی هستند (مستطیل با ضلع‌های به طول ۸ و ۲۱ و مربع با ضلع به طول ۱۳) و دربارهٔ عددهای فیبوناچی ثابت کردیم:

$$u_{n+۱} \cdot u_{n-۱} - u_n^۲ = (-۱)^n$$

بنابراین، به جای سه عدد ۸ و ۱۳ و ۲۱، می‌توان چیستان را با هر سه جملهٔ دلخواه و پشت سر هم دنبالهٔ فیبوناچی ساخت (۵ و ۸ و ۱۳ یا ۱۳ و ۲۱ و ۳۴ یا ۲۱ و ۳۴ و ۵۵ و غیره). ولی هر چه این سه عدد بزرگتر باشند، به دلیل بزرگتر شدن مساحت مستطیل، توجه به شکستگی AB در نقطهٔ C، دشوارتر می‌شود و، بدون محاسبه، نمی‌توان به آن پی برد.

درضمن، در سه جملهٔ متوالی از دنبالهٔ فیبوناچی، یعنی u_{n-1} و u_n و u_{n+1}، وقتی n عددی زوج باشد، مساحت مستطیل، به اندازهٔ یک واحد مربع از مساحت مربع بیشتر است و، بنابراین در طول از A تا B شکاف و رخنه‌ای پدید می‌آید؛ ولی وقتی n عددی فرد باشد، مساحت مستطیل یک واحد مربع از مساحت مربع کمتر می‌شود و، در طول از A تا B، بخشی از تکه مقواها روی هم قرار می‌گیرند.

*__یادداشت تاریخی.__ لئوناردو اهل پیزای ایتالیا که به **لئوناردوی پیزائی** و اغلب **فیبوناچی** (یعنی پسر بوناچیو) مشهور است، در سال‌های بین ۱۱۷۰ و ۱۲۲۸ میلادی زندگی می‌کرد. پدرش در یک شرکت بازرگانی ایتالیایی، در الجزایر کار می‌کرد و پسر خود را به آن‌جا برد. فیبوناچی در الجزایر و به وسیلهٔ نوشته‌های عربی ریاضی‌دانان شرق، با عدد نویسی هندی (که کم و بیش، همان شیوهٔ عدد نویسی امروزی است) آشنا شد و در برگشت به ایتالیا، این روش عدد نویسی را، برای نخستین بار، با نوشتن کتاب «حساب» خود، به اروپای غربی شناساند. فیبوناچی را باید یکی از پیش‌گامان دانش ریاضی در اروپای غربی، در سال‌های پایانی سده‌های میانه دانست.

دنباله‌ای که امروز به نام «دنبالهٔ عددهای فیبوناچی» مشهور است (و مسالهٔ ۱۴۱ مربوط به آن بود)، به وسیلهٔ فیبوناچی، به این صورت‌آمده است:

یک جفت خرگوش نوزاد را در اتاقی قرار داده‌ایم. خرگوش ماده دو ماه بعد از تولد می‌تواند نخستین بچه‌های خود را، که تنها یک جفت نر و ماده هستند، بیاورد، ولی بعد از آن، در آخر هر ماه یک جفت خرگوش تولید می‌کنند. اگر فرض کنیم، همهٔ خرگوش‌ها زنده بمانند، در پایان سال، چند جفت خرگوش در اتاق خواهد بود.

حل مساله دشوار نیست. اگر آن طور که معمول است، تعداد جفت خرگوش‌ها را در جریان ماه nام، با F_n نشان دهیم، در جریان دو ماه اول و دوم، یک جفت خرگوش وجود دارد، زیرا بنا به فرض، برای بار اول، دو ماه

بعد از تولد، یک جفت به خرگوش‌ها اضافه می‌شود: $F_1 = ۱$ و $F_۲ = ۱$.

در جریان ماه سوم، دو جفت خرگوش خواهیم داشت (جفت خرگوش اول صاحب بچه می‌شوند): $F_۳ = ۲$. در جریان ماه چهارم، جفت خرگوش اول، صاحب یک جفت بچه می‌شوند: $F_۴ = ۳$. در جریان ماه پنجم، به‌جز جفت خرگوش اصلی، نسل اول بچه‌ها هم صاحب یک جفت خرگوش می‌شوند: $F_۵ = ۵$ و غیره. اگر استدلال را ادامه دهیم، همان دنبالهٔ فیبوناچی (به‌جز $F_۰ = ۰$) به دست می‌آید:

$$۱, ۱, ۲, ۳, ۵, ۸, ۱۳, ۲۱, ۳۴, ۵۵, ۸۹, ۱۴۴, ۲۳۳,$$
$$۳۷۷, ۶۱۰, ۹۸۷, ۱۵۹۷, ۲۵۸۴, ۴۱۸۱, F_{۲۰} = ۶۷۶۵$$

البته، خود فیبوناچی، به‌جز طرح و حل این مساله، کار دیگری دربارهٔ این دنبالهٔ عددی انجام نداد، ولی از سدهٔ نوزدهم که لوکاس، ریاضی‌دان فرانسوی، این دنباله را مورد توجه قرار داد، توجه دیگران هم به آن جلب شد. خود لوکاس و، سپس، دیگران، به‌جز کشف ویژگی‌هایی از این دنبالهٔ عددی، تلاش‌هایی در جهت تعمیم آن انجام دادند.

دنبالهٔ عددی فیبوناچی، ویژگی‌های جالبِ بسیاری دارد که، در این دوره از کتاب‌ها، باز هم به آن‌ها خواهیم پرداخت.

۱۴۲. ۱) این مجموع را می‌توان این طور تبدیل کرد:

$$۱ - ۲^۲ + ۳^۲ - ۴^۲ + ۵^۲ - ۶^۲ + \ldots + ۹۹^۲ - ۱۰۰^۲ =$$
$$= -[(۲^۲ - ۱) + (۴^۲ - ۳^۲) +$$
$$+(۶^۲ - ۵^۲) + \ldots + (۱۰۰^۲ - ۹۹^۲)] =$$
$$= -[(۲ - ۱)(۲ + ۱) + (۴ - ۳)(۴ + ۳) +$$
$$+(۶ - ۵)(۶ + ۵) + \ldots + (۱۰۰ - ۹۹)(۱۰۰ + ۹۹)] =$$
$$= -(۳ + ۷ + ۱۱ + ۱۵ + \ldots + ۱۹۹)$$

داخل پرانتز، یک تصاعد حسابی با جملهٔ اول ۳، قدر نسبت ۴ و جملهٔ nام ۱۹۹ قرار دارد. از آن‌جا، می‌توان n را محاسبه کرد:

$$۱۹۹ = ۳ + (n - ۱)۴ \Rightarrow n = ۵۰$$

بنابراین، مجموع داخل پرانتز برابر است با

$$\frac{n}{۲}(a_۱ + a_n) = \frac{۵۰}{۲}(۳ + ۱۹۹) = ۵۰۵۰$$

پاسخ. -۵۰۵۰.

۲) به ترتیب داریم:

$$۵ + ۵۵ + ۵۵۵ + \ldots + \underbrace{۵۵\ldots۵}_{n\text{رقم}} =$$

$$= \frac{۵}{۹}(۹ + ۹۹ + ۹۹۹ + \ldots + \overbrace{۹۹\ldots۹}^{n\text{رقم}}) =$$

$$= \frac{۵}{۹}[(۱۰ - ۱) + (۱۰^۲ - ۱) + (۱۰^۳ - ۱) + \ldots + (۱۰^n - ۱)] =$$

$$= \frac{۵}{۹}[(۱۰ + ۱۰^۲ + ۱۰^۳ + \ldots + ۱۰^n) - n] =$$

$$= \frac{۵}{۹}\left[\frac{۱۰(۱۰^n - ۱)}{۱۰ - ۱} - n\right] = \frac{۵}{۹}\left(\frac{۱۰^{n+۱} - ۱۰}{۹} - n\right] =$$

$$= \frac{۵}{۸۱}(۱۰^{n+۱} - ۹n - ۱۰)$$

نتیجهٔ محاسبه روشن می‌کند که عبارت $۱۰^{n+۱} - ۹n - ۱۰$، به ازای هر عدد طبیعی n، بر ۸۱ بخش‌پذیر است (آیا می‌توانید، خود این حکم را، به طور مستقیم ثابت کنید؟).

۳) چون $n(n+۱)=n^۲+n$، بنابراین

$$\begin{aligned}
۱\times ۲ &= ۱^۲+۱\\
۲\times ۳ &= ۲^۲+۲\\
۳\times ۴ &= ۳^۲+۳\\
&\cdots\cdots\\
۱۰۰\times ۱۰۱ &= ۱۰۰^۲+۱۰۰
\end{aligned}$$

از مجموع این برابری‌های و با توجه به این که

$$۱+۲+\ldots+n=\frac{n}{۲}(n+۱) \quad \text{و}$$

$$۱^۲+۲^۲+\ldots+n^۲=\frac{n}{۶}(n+۱)(۲n+۱)$$

به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
&۱\times ۲+۲\times ۳+\ldots+۱۰۰\times ۱۰۱=\\
&=\frac{۱۰۰}{۶}(۱۰۰+۱)(۲۰۰+۱)+\frac{۱۰۰}{۲}(۱۰۰+۱)=۳۴۳۴۰۰
\end{aligned}$$

پیش قضیه برای ۴)، ۵) و ۶). اگر $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n، جمله‌های پشت سر هم از یک تصاعد حسابی باشند، می‌توان مجموع زیر را محاسبه کرد:

$$S_n=\frac{۱}{a_۱a_۲}+\frac{۱}{a_۲a_۳}+\frac{۱}{a_۳a_۴}+\ldots+\frac{۱}{a_na_{n+۱}}$$

قدر نسبت تصاعد حسابی را d فرض می‌کنیم. در این صورت

$$\frac{۱}{a_na_{n+۱}}=\frac{۱}{a_{n+۱}-a_n}\left(\frac{۱}{a_n}-\frac{۱}{a_{n+۱}}\right)=\frac{۱}{d}\left(\frac{۱}{a_n}-\frac{۱}{a_{n+۱}}\right)$$

بنابراین

$$S_n = \frac{۱}{d}\left[\left(\frac{۱}{a_۱} - \frac{۱}{a_۲}\right) + \left(\frac{۱}{a_۲} - \frac{۱}{a_۳}\right) + \left(\frac{۱}{a_۳} - \frac{۱}{a_۴}\right) + \dots\right.$$
$$\left. + \dots \left(\frac{۱}{a_n} - \frac{۱}{a_{n+۱}}\right)\right] = \frac{۱}{d}\left(\frac{۱}{a_۱} - \frac{۱}{a_{n+۱}}\right]$$

به این ترتیب، برای تمرین‌های ۴) و ۵) و ۶) خواهیم داشت:

$$۴)\ \frac{۱}{۲ \times ۵} + \frac{۱}{۵ \times ۸} + \frac{۱}{۸ \times ۱۱} + \dots + \frac{۱}{۶۲ \times ۶۵} =$$
$$= \frac{۱}{۳}\left[\left(\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۵}\right) + \left(\frac{۱}{۵} - \frac{۱}{۸}\right) + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{۱}{۸} - \frac{۱}{۱۱}\right) + \dots + \left(\frac{۱}{۶۲} - \frac{۱}{۶۵}\right)\right]$$
$$= \frac{۱}{۳}\left(\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۶۵}\right) = \frac{۲۱}{۱۳۰};$$

۵) ابتدا مجموع n جمله را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{۱}{۱ \times ۲} + \frac{۱}{۲ \times ۳} + \frac{۱}{۳ \times ۴} + \dots + \frac{۱}{n(n+۱)} =$$
$$= \left(۱ - \frac{۱}{۲}\right) + \left(\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۳}\right) + \left(\frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۴}\right) + \dots + \left(\frac{۱}{n} - \frac{۱}{n+۱}\right)$$
$$= ۱ - \frac{۱}{n+۱}$$

هرچه n بزرگتر باشد، مقدار $\frac{۱}{n+۱}$ کوچکتر و، در نتیجه، حاصل این مجموع به ۱ نزدیکتر می‌شود. وقتی تعداد جمله‌ها (یعنی n)، بی‌نهایت باشد، حاصل مجموع برابر واحد خواهد شد:

$$\frac{۱}{۱ \times ۲} + \frac{۱}{۲ \times ۳} + \dots + \frac{۱}{n(n+۱)} + \dots = ۱;$$

۶) شبیه تمرین ۵) عمل می‌کنیم:

$$\frac{۱}{۱\times ۳}+\frac{۱}{۳\times ۵}+\ldots+\frac{۱}{(۲n-۱)(۲n+۱)}=\frac{۱}{۲}\left(۱-\frac{۱}{۲n+۱}\right)$$

در نتیجه، وقتی تعداد جمله‌های دنباله، بی‌پایان باشد، مجموع برابر $\frac{۱}{۲}$ می‌شود.

۱۴۳. در تصاعد حسابی مورد نظر مساله، جملهٔ اول برابر ۱ و قدر نسبت برابر ۰/۰۰۰۰۱۲ است:

$$۱,\ ۱/۰۰۰۰۱۲,\ ۱/۰۰۰۰۲۴,\ ۱/۰۰۰۰۳۶,\ldots$$

طول میله در درجهٔ حرارت ۱۰۰ برابر است با

$$۱+۱۰۰\times ۰/۰۰۰۰۱۲=۱/۰۰۱۲\ \text{(متر)}$$

۱۴۴. اگر سرعت نخستین دوچرخه (یعنی سرعت آن، در آغاز ثانیهٔ اول) را $a_۱$ بگیریم و فرض کنیم، در هر ثانیه، به اندازهٔ d متر بر سرعت آن اضافه شود، آن وقت، جمله‌های پشت سر هم تصاعد حسابی با جملهٔ اول $a_۱$ و قدر نسبت d، معرف سرعت دوچرخه، در آغاز ثانیه‌های متوالی خواهد بود:

$$a_۱, a_۱+d, a_۱+۲d,\ldots, a_۱+(n-۱)d,\ldots$$

بنابراین، سرعت دوچرخه، در آغاز ثانیهٔ دهم برابر $a_۱+۹d$ و در پایان ثانیهٔ شانزدهم (یعنی آغاز ثانیهٔ هفدهم) برابر $a_۱+۱۶d$ و سرعت متوسط آن، در این صورت، برابر

$$\frac{(a_۱+۹d)+(a_۱+۱۶d)}{۲}=\frac{۲a_۱+۲۵d}{۲}$$

متر در ثانیه است و باید داشته باشیم:

$$\frac{۲a_۱ + ۲۵d}{۲} = ۶/۴۵ \qquad (۱)$$

به همین ترتیب، سرعت دوچرخه درآغاز ثانیهٔ دوازدهم برابربا $a_۱ + ۱۱d$ و در پایان ثانیه نوزدهم $a_۱ + ۱۹d$ است و سرعت متوسط آن در این مدت، برابر می‌شود با

$$\frac{(a_۱ + ۱۱d) + (a_۱ + ۱۹d)}{۲} = a_۱ + ۱۵d$$

و باید داشته باشیم

$$a_۱ + ۱۵d = ۷/۷ \qquad (۲)$$

دستگاه شامل معادله‌های (۱) و (۲)، مقدارهای $a_۱$ و d را به ما می‌دهند:

$$a_۱ = ۰/۲, d = ۰/۵$$

و سرعت دوچرخه، در پایان ثانیهٔ نوزدهم (یعنی آغاز ثانیهٔ بیستم):

$$a_{۲۰} = ۰/۲ + ۰/۵ \times ۱۹ = ۹/۷ \text{ (متر در ثانیه)}$$

۱۴۵. اگر مخزن پر از آب را، به ارتفاع ۸۰ سانتی‌متر بالا می‌بردیم، برای محاسبهٔ مقدار کار لازم، به طور ساده، وزن آب را در ارتفاع جابه‌جایی ضرب می‌کردیم. ولی در مساله، آب را، نه یکباره، بلکه اندک اندک بالا می‌بریم؛ در ضمن، ارتفاع جابه‌جایی، برای قطره‌هایی از آب که در لایه‌های افقی مختلف قرار دارند، با یکدیگر متفاوت‌اند.

فرض می‌کنیم، آب درون مخزن را، با صفحه‌هایی موازی با قاعدهٔ مخزن، به n لایهٔ نازک با ارتفاع‌های برابر، تقسیم کرده باشیم. ارتفاع هر لایه برابر

$\frac{۸۰}{n}$ سانتی‌متر یا $\frac{۸}{n}$ دسی‌متر و حجم هر لایه، برابر $\frac{۸}{n} \times ۶ \times ۵$ یا $\frac{۲۴۰}{n}$ دسی‌متر مکعب و وزن آن برابر $\frac{۲۴۰}{n}$ کیلوگرم می‌شود (هر سانتی‌متر مکعب آب یک گرم و هر دسی‌متر مکعب آب یک کیلوگرم وزن دارد).

کار لازم، برای بالا بردن لایه‌های مختلف آب را محاسبه می‌کنیم. هر لایه دو قاعده دارد: قاعدهٔ پایین و قاعدهٔ بالا.

فرض می‌کنیم، همهٔ قطره‌های آبی که در درون یکی از این لایه‌ها قرار دارند، در قاعدهٔ پایینی این لایه باشند، یعنی به ارتفاعی برابر فاصلهٔ قاعدهٔ پایینی لایه تا لبهٔ بالایی مخزن، بالا آورده شوند. کار لازم، برای بالا بردن نخستین لایه (لایهٔ فوقانی)، برابر $\frac{۰/۸}{n} \times \frac{۲۴۰}{n}$، یعنی $A_۱ = \frac{۱۹۲}{n^۲}$ کیلوگرم متر؛ برای بالا بردن لایهٔ دوم برابر $A_۲ = ۲ \times \frac{۱۹۲}{n^۲}$ کیلوگرم متر؛ ...؛ برای بالا بردن $(n - ۱)$امین لایه $(n - ۱)\frac{۱۹۲}{n^۲}$ کیلوگرم متر و، سرانجام، برای بالا بردن nامین لایه (لایهٔ پایینی) $A_n = n \cdot \frac{۱۹۲}{n^۲}$ کیلوگرم‌متر است.

چون همهٔ قطره‌های آب هر لایه را، در قاعدهٔ پایین آن در نظر گرفته‌ایم، روشن است که، مقدار واقعی کار لازم، برای بالا بردن همهٔ مایع درون یک لایه، کمتر از مقداری است که در این‌جا به حساب آورده‌ایم. بنابراین، اگر A را مقدار درستِ کار لازم، برای بالا آوردن تمام آب، بگیریم، داریم:

$$A < A_۱ + A_۲ + \ldots + A_{n-۱} + A_n$$

اکنون، فرض می‌کنیم، همهٔ قطره‌های آب هر لایه، به ارتفاعی برابر فاصلهٔ قاعدهٔ بالایی لایه تا لبهٔ بالای مخزن بالا برده شود. در این صورت، کار لازم

برای بالا آوردن لایهٔ اول $A'_1 = 0$، برای لایهٔ دوم

$$A'_2 = \frac{204}{n} \times \frac{0/8}{n} = A_1$$

برای لایهٔ سوم

$$A'_3 = 2 \times \frac{240}{n} \times \frac{0/8}{n} = A_2$$

و سرانجام، برای لایهٔ nام

$$A'_n = (n-1)\frac{240}{n} \times \frac{0/8}{n} = (n-1)\frac{192}{n^2} = A_{n-1}$$

کیلوگرم متر است. ولی در این حالت، مقدار واقعی کار، بیشتر از مقداری است که در اینجا به دست آورده‌ایم، به این ترتیب

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_{n-1} < A < A_1 + A_2 + \ldots + A_n$$

چون اختلاف دو سمت این نابرابری مضاعف، برابر A_n است، پس

$$(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) - A < A_n = \frac{192}{n}$$

مجموع $S = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$، مجموع جمله‌های پشت سر هم یک تصاعد حسابیِ nجمله‌ای، با جملهٔ اول $\frac{192}{n^2}$ و جملهٔ آخر $\frac{192}{n}$ است، یعنی

$$S = \frac{n}{2}(A_1 + A_n) = \frac{n}{2}\left(\frac{192}{n^2} + \frac{192}{n}\right) = \frac{96}{n} + 96$$

عدد n، یعنی تعداد لایه‌ها را زیاد و زیادتر می‌کنیم. روشن است، هرچه n بزرگتر شود، $\frac{۹۶}{n}$ کوچکتر می‌شود و اگر n را بسیار بزرگ بگیریم، $\frac{۹۶}{n}$ بسیار کوچک می‌شود (در ریاضیات می‌گویند، وقتی n به سمت بی‌نهایت برود، $\frac{۹۶}{n}$ به سمت صفر میل می‌کند). به این ترتیب، مقدار واقعی کار برابر است با

$$A = ۹۶ \text{ (کیلوگرم متر)}$$

۱۴۶. جملهٔ وسط تصاعد را x و قدر نسبت تصاعد را q می‌گیریم؛ سه عدد، به ترتیب، برابر $\frac{x}{q}$، x و qx درمی‌آیند. حاصل ضرب این سه عدد برابر است با $x^۳$ که باید کمترین و بیشترین مقدار ممکنِ آن را پیدا کنیم. بنا به فرض داریم:

$$\frac{x}{q} + x + qx = a \Rightarrow xq^۲ + (x-a)q + x = ۰$$

این معادلهٔ درجه دوم (نسبت به مجهول q)، وقتی ریشه‌های حقیقی دارد که داشته باشیم:

$$(x-a)^۲ - ۴x^۲ \geq ۰ \Rightarrow ۳x^۲ + ۲ax - a^۲ \leq ۰$$

و اگر عبارت سمت چپ نابرابری را تجزیه کنیم:

$$(x+a)(۳x-a) \leq ۰$$

که از آن‌جا، با حل نامعادله و با توجه به مثبت بودن a، به دست می‌آید (خودتان نامعادله را با دقت حل کنید):

$$-a \leq x \leq \frac{a}{۳} \Rightarrow -a^۳ \leq x^۳ \leq \frac{۱}{۲۷}a^۳$$

کمترین مقدار حاصل ضرب سه عدد $-a^۳$ و برای عددهای

$$a, -a, a, \ (q = -۱)$$

است و بیشترین مقدار حاصل ضرب سه عدد برابر $\frac{۱}{۲۷}a^۳$ و برای عددهای

$$\frac{a}{۳}, \frac{a}{۳}, \frac{a}{۳}, \ (q = ۱)$$

۱۴۷. سه جمله‌ای $n^۴ + ۲n^۲ + ۹$ را تجزیه می‌کنیم:

$$n^۴ + ۲n^۲ + ۹ = (n^۴ + ۶n^۲ + ۹) - ۴n^۲ =$$
$$= (n^۲ + ۳)^۲ - ۴n^۲ = (n^۲ + ۲n + ۳)(n^۲ - ۲n + ۳)$$

اکنون تلاش می‌کنیم، جملهٔ عمومی دنباله را، به مجموع دو کسر ساده‌تر تبدیل کنیم. برای این منظور، فرض می‌کنیم:

$$\frac{۴n}{(n^۲ + ۲n + ۳)(n^۲ - ۲n + ۳)} = \frac{A}{n^۲ + ۲n + ۳} + \frac{B}{n^۲ - ۲n + ۳}$$

اگر مجموع دو کسر سمت راست برابری را محاسبه کنیم، به این کسر می‌رسیم:

$$\frac{(A + B)n^۲ + ۲(B - A)n + ۳(A + B)}{n^۴ + ۲n^۲ + ۹}$$

روشن است که باید، صورت این کسر، با صورت کسر اصلی، یعنی $۴n$ متحد باشد (چون مخرج‌ها، متحدند):

$$(A + B)n^۲ + ۲(B - A)n + ۳(A + B) \equiv ۴n$$

که اگر ضریب‌ها را، در دو طرف برابری، مساوی قرار دهیم:

$$\begin{cases} A + B = ۰ \\ ۲(B - A) = ۴ \end{cases} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} A = -۱ \\ B = ۱ \end{array} \right.$$

یعنی

$$u_n = \frac{۱}{n^۲ - ۲n + ۳} - \frac{۱}{n^۲ + ۲n + ۳} \qquad (۱)$$

مجموع n جملهٔ اول دنباله را محاسبه می‌کنیم. برای این منظور برابری (۱) را، به ازای $n = ۱$ تا $n = n$، زیر هم می‌نویسیم:

$$u_۱ = \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۶}$$

$$u_۲ = \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۱۱}$$

$$u_۳ = \frac{۱}{۶} - \frac{۱}{۱۸}$$

$$u_۴ = \frac{۱}{۱۱} - \frac{۱}{۲۷}$$

$$u_۵ = \frac{۱}{۱۸} - \frac{۱}{۳۸}$$

. . . .

$$u_{n-۱} = \frac{۱}{n^۲ - ۴n + ۶} - \frac{۱}{n^۲ + ۲}$$

$$u_n = \frac{۱}{n^۲ - ۲n + ۳} - \frac{۱}{n^۲ + ۲n + ۳}$$

با اندکی دقت، از مجموع این برابری‌ها به دست می‌آید:

$$S_n = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{n^۲ + ۲} - \frac{۱}{n^۲ + ۲n + ۳}$$

وقتی n عددی بسیار بزرگ باشد، کسرهای $\frac{1}{n^2+2}$ و $\frac{1}{n^2+2n+3}$ بسیار کوچک می‌شود و، در حالتی که تعداد جمله‌های دنباله، بی‌نهایت باشد، می‌توان از آن‌ها صرف نظر کرد. بنابراین خواهیم داشت:

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

۱۴۸. بنا بر فرض، باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} a+c=2b \\ b^2=-\frac{1}{3}ac \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+c=2b \\ a\cdot c=-3b^2 \end{cases}$$

یعنی a و c، ریشه‌های این معادلهٔ درجه دوم‌اند:

$$t^2 - 2bt - 3b^2 = 0 \Rightarrow t_1 = 3b,\ t_2 = -b$$

یعنی یا $a=3b$ و $c=-b$، یا $a=-b$, $c=3b$. سه‌جمله‌ای به یکی از دو صورت زیر درمی‌آید:

$$3bx^2+bx-b \text{ یا } -bx^2+bx+3b$$

برای حل معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$، با توجه به این‌که b نمی‌تواند برابر صفر باشد)، به یکی از این دو معادله می‌رسیم:

$$3x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1\pm\sqrt{13}}{6}$$

$$x^2 - x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$$

۱۴۹ـ در آغاز به این نکتهٔ روشن توجه کنیم که، اگر بدانیم در یک دنباله، نسبت $\frac{u_{n+1}}{u_n}$، با بزرگ شدن n به عددی مثل a نزدیک شود، می‌توان

به جای این نسبت، هر نسبت دیگری که شبیه آن باشد، مثل $\frac{u_n}{u_{n-1}}$ یا $\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}}$ و غیره را در نظر گرفت، زیرا این نسبت‌ها در هر حالت، نسبت یک جملهٔ دنباله را به جملهٔ قبل از خودش نشان می‌دهند.

برای هر دنبالهٔ عددهای فیبوناچی می‌دانیم:

$$u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$$

که با تقسیم دو طرف برابری بر u_n، به این صورت درمی‌آید:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{u_{n-1}}{u_n} = 1 + \frac{1}{\frac{u_n}{u_{n-1}}}$$

نسبت یک جمله از دنبالهٔ فیبوناچی به جملهٔ قبل از خودش را، در حالتی که n عددی بسیار بزرگ باشد (به سمت بی‌نهایت میل کرده باشد) برابر a می‌گیریم؛ آن وقت، برابری بالا به صورت زیر درمی‌آید:

$$a = 1 + \frac{1}{a} \Rightarrow a^2 - a - 1 = 0$$

a، عددی مثبت است، بنابراین، ریشهٔ مثبت این معادله قابل قبول است:

$$a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

*__یادداشت ۱.__ عدد $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$، که به تقریب برابر ۱٫۶۱۸ است (اندکی از این عدد کوچکتر است)، **عدد طلایی** نامیده می‌شود و ویژگی‌های بسیار جالبی دارد که به خصوص، از دیدگاه زیبایی شناسی مهم‌اند. به همین مناسبت، عدد طلایی مورد توجه هنرمندان (معماران، نقاشان، مجسمه‌سازان و غیره) است. امیدواریم، فرصتی پیش آید و در جلدهای بعدی «ریاضیات محاسبه‌ای» دربارهٔ آن بیشتر صحبت کنیم.

عدد طلایی با دنبالهٔ فیبوناچی، رابطه‌ای نزدیک دارد که، یک جنبهٔ آن را مسالهٔ ۱۴۹ بررسی کردیم. اگر در دنبالهٔ فیبوناچی، به ترتیب، نسبت دو جملهٔ متوالی را به دست آوریم، با پیش رفتن در عددهای دنباله، پیوسته به عدد طلایی نزدیک‌تر می‌شویم، ولی این نسبت‌ها، به ترتیب، یکی کوچکتر و دیگری بزرگتر از عدد طلایی به دست می‌آید. دنبالهٔ فیبوناچی را می‌نویسیم:

$$۱, ۱, ۲, ۳, ۵, ۸, ۱۳, ۲۱, ۳۴, \ldots$$

و به ترتیب، نسبت هر جمله را به جملهٔ قبل پیدا می‌کنیم. (عدد طلایی یا نسبت طلایی را φ نامیده‌ایم):

$$\frac{۱}{۱} = ۱ < \varphi,\ \frac{۲}{۱} = ۲ > \varphi;\ ۱ < \varphi < ۲;$$
$$۳ : ۲ = ۱/۵ < \varphi;\ ۱/۵ < \varphi < ۲;$$
$$۵ : ۳ = ۱/۶۶۶\ldots > \varphi;\ ۱/۵ < \varphi < ۱/۶۶۶\ldots;$$
$$۸ : ۵ = ۱/۶ < \varphi;\ ۱/۶ < \varphi < ۱/۶۶۶\ldots;$$
$$۱۳ : ۸ = ۱/۶۲۵ > \varphi;\ ۱/۶ < \varphi < ۱/۶۲۵;$$
$$۲۱ : ۱۳ \approx ۱/۶۱۵ < \varphi;\ ۱/۶۱۵ < \varphi < ۱/۶۲۵;$$
$$۳۴ : ۲۱ \approx ۱/۶۱۹ > \varphi;\ ۱/۶۱۵ < \varphi < ۱/۶۱۹$$

می‌بینید، این نسبت پیوسته به $\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$، یعنی به تقریب ۱/۶۱۸ نزدیکتر می‌شود.

یادداشت ۲. اگر دنباله‌ای را با دستور برگشتی

$$u_{n+۱} = ku_n + k^{۲}u_{n-۱}\ ،\ (k \neq ۰)$$

در نظر بگیریم (این دنباله، به‌ازای $k = ۱$، همان دنبالهٔ فیبوناچی است)، آن

وقت نسبت $\frac{u_{n+1}}{u_n}$، با بزرگ شدن n، به این عدد نزدیک می‌شود:

$$k\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

۱۵۰. دستمزد هر ساعت کار کارگر ساده را a، کارگر دستیار را aq و کارگر متخصص را aq^2 می‌گیریم. به این دستگاه می‌رسیم:

$$\begin{cases} 10 \times 7aq^2 + 5 \times 7aq + 15 \times 7a = 367080 \\ 5 \times 7aq^2 + 15 \times 7aq + 10 \times 7a = 455680 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5a(2q^2 + q + 3) = 52440 \\ 5a(q^2 + 3q + 2) = 52240 \end{cases}$$

با توجه به این که $q > 0$ و $a \neq 0$، از تقسیم معادلهٔ اول بر معادلهٔ دوم، به دست می‌آید:

$$\frac{2q^2+q+3}{q^2+3q+2} = \frac{52440}{52240} = \frac{1311}{1306}$$

که سرانجام، ما را به این معادلهٔ درجه دوم می‌رساند:

$$1301q^2 - 2627q + 1296 = 0$$

که از آن، مقدار q به دست می‌آید

$$q = \frac{2627 + \sqrt{6901129 - 6744384}}{2602} = \frac{2627 + \sqrt{156745}}{2602}$$

$$= \frac{2627 + 395/9}{2602} = \frac{3032/9}{2602} \approx 1/162$$

با در دست داشتن مقدار q، می‌توان مقدار a (دستمزد کارگر ساده) را پیدا کرد:

$$a = \frac{52440}{5(2q^2+q+3)} \approx 1528 \text{ (ریال)}$$

و برای کارگر دستیار و کارگر متخصص:

$$aq = ۱۵۲۸ \times ۱/۱۶۲ = ۱۷۷۶ \text{ (ریال)}$$
$$aq^۲ = ۱۵۲۸ \times ۱/۱۶۲^۲ = ۲۰۶۴ \text{ (ریال)}$$

۱۵۱. ۹، جملهٔ اول و ۲۸۸، جملهٔ ششم تصاعد هندسی است. با توجه به دستور $a_n = a_۱ q^{n-۱}$، به دست می‌آید:

$$۲۸۸ = ۹q^۵ \Rightarrow q = ۲$$

و تصاعد هندسی شامل این جمله‌هاست:

$$۹, ۱۸, ۳۶, ۷۲, ۱۴۴, ۲۸۸$$

پاسخ. چهار سرعت زاویه‌ای محور چرخ تراش عبارتند از: ۱۸، ۳۶، ۷۲ و ۱۴۴.

۱۵۲. از آن‌جا که رشد سالانهٔ تولید صنعتی ۸/۶ درصد است، تولید هر سال ۱/۰۸۶ سال پیش می‌شود (به یک واحد تولید، ۰/۰۸۶ واحد اضافه می‌شود). بنابراین تولید سالانه در این ۷ سال، تشکیل یک تصاعد هندسی با قدر نسبت ۱/۰۸۶ می‌دهند: با توجه به دستور مجموع جمله‌های یک تصاعد هندسی

$$S_۴ = \frac{a(q^۴ - ۱)}{q - ۱},\ S_۷ = \frac{a(q^۷ - ۱)}{۶ - ۱}$$

از آن‌جا به دست می‌آید:

$$\frac{S_۳}{S_۷} = \frac{q^۴ - ۱}{q^۷ - ۱} = \frac{۱/۰۸۶^۴ - ۱}{۱/۰۸۶^۷ - ۱} = \frac{(۱/۰۸۶^۲)^۲ - ۱}{۱/۰۸۶^۴ \times ۱/۰۸۶^۳ - ۱}$$

محاسبه‌ها را انجام می‌دهیم:

$$۱/۰۸۶^۴ \approx ۱/۱۷۹^۲ = ۱/۳۹۰;$$

$$۱/۰۸۶^۷ \approx ۱/۳۹۰ \times ۱/۰۸۶^۳ \approx ۱/۳۹۰ \times ۱/۲۸۱ \approx ۱/۷۸۰;$$

یعنی مقدار تولید در چهار سال اول، برابر است با مقدار تولید در سه سال آخر.

۱۵۳. چون تصاعد هندسی نزولی است و $|q| < ۱$، پس مجموع همهٔ جمله‌های آن، از دستور $S = \frac{۱}{۱-q}$ به دست می‌آید:

$$۶ = \frac{۱}{۱-q} \Rightarrow ۱ = ۶ - ۶q \Rightarrow q = \frac{۵}{۶}$$

مجموع چهار جملهٔ اول تصاعد، با دستور $S_۴ = \frac{a(۱-q^۴)}{۱-q}$ محاسبه می‌شود. بنابراین

$$۳/۱۰۶(۴۸۱) = \frac{a\left[۱-\left(\frac{۵}{۶}\right)^۴\right]}{۱-\frac{۵}{۶}} = a \times \frac{۱-\frac{۶۲۵}{۱۲۹۶}}{\frac{۱}{۶}} =$$

$$= a \times \frac{۶۷۱}{۲۱۶}$$

کسر متناوب مرکب $۳/۱۰۶(۴۸۱)$ را به کسر متعارفی تبدیل می‌کنیم:

$$۳/۱۰۶(۴۸۱) = ۳ + \frac{۱۰۶۴۸۱ - ۱۰۶}{۹۹۹۰۰۰} = ۳ + \frac{۱۰۶۳۷۵}{۹۹۹۰۰۰} =$$

$$= ۳ + \frac{۵^۳ \times ۲۳ \times ۳۷}{۲^۳ \times ۳^۳ \times ۵^۳ \times ۳۷} = ۳ + \frac{۲۳}{۲^۳ \times ۳^۳} =$$

$$= \frac{۳ \times ۲۱۶ + ۲۳}{۲۱۶} = \frac{۶۷۱}{۲۱۶}$$

یعنی $\frac{۶۷۱}{۲۱۶} = a \times \frac{۶۷۱}{۲۱۶}$ و $a = ۱$.

پاسخ. جملهٔ اول تصاعد $a = ۱$ و قدر نسبت تصاعد $q = \frac{۵}{۶}$.

۱۵۴. *راهنمایی*. شعاع دایرهٔ محاط در مثلث متساوی‌الاضلاع، طولی برابر $\frac{۱}{۳}$ ارتفاع آن دارد (زیرا در مثلث متساوی‌الاضلاع، میانه، نیمساز و ارتفاع وارد از یک راس بر قاعده، بر یکدیگر منطبق‌اند). شعاع دایرهٔ محاط در مثلث اول برابر $\frac{a\sqrt{۳}}{۶}$ است. شعاع‌های دایره‌های محاطی، تصاعدی هندسی با قدر نسبت برابر $\frac{۱}{۲}$ و، بنابراین، مساحت‌های آن‌ها، تصاعدی هندسی با قدر نسبت $\frac{۱}{۴}$ تشکیل می‌دهند.

پاسخ. مجموع مساحت‌های همهٔ دایره‌های محاطی، برابر $\frac{\pi}{۹}a^۲$ است.

۱۵۵. با فرض $y = x^۲$، به معادلهٔ درجه دوم

$$۳y^۲ - ۲(۲m + ۱)y + m + ۱ = ۰ \qquad (۱)$$

می‌رسیم که ریشه‌های آن را $y_۱$ و $y_۲$ می‌نامیم. $y_۱$ و $y_۲$ باید عددهایی مثبت باشد که، در این صورت، برای x، چهار جواب حقیقی (که دو به دو قرینهٔ یکدیگرند) به دست می‌آید:

$$-x_۱, -x_۲, x_۲, x_۱$$

که اگر به تصاعد حسابی باشند، باید داشته باشیم:

$$-x_۲ - (-x_۱) = x_۲ - (-x_۲) \Rightarrow x_۱ = ۳x_۲,$$

با مجذور کردن دو طرف این برابری، به برابری $x_۱^۲ = ۹x_۲^۲$ می‌رسیم و چون $x_۱^۲$ و $x_۲^۲$ دو ریشهٔ معادلهٔ درجه دوم (۱) هستند، باید داشته باشیم:

$y = ۹y_{۲}$. به این دستگاه می‌رسیم:

$$y_{۱} + y_{۲} = \frac{۲(۲m + ۱)}{۳},\ y_{۱} \cdot y_{۲} = \frac{m + ۱}{۳},\ y_{۱} = ۹y_{۲}$$

که با حل آن به دست می‌آید: $m = ۲$ یا $m = -\frac{۱۱}{۲}$. جواب $m = -\frac{۱۱}{۲}$ قابل قبول نیست، زیرا به ازای این مقدار m، به ریشه‌های موهومی برای x می‌رسیم. به ازای $m = ۲$، به معادلهٔ

$$۳x^{۴} - ۱۰x^{۲} + ۳ = ۰ \Rightarrow x = \pm\sqrt{۳}, \pm\frac{۱}{\sqrt{۳}}$$

می‌رسیم و عددهای

$$-\sqrt{۳}, -\frac{\sqrt{۳}}{۳}, \frac{\sqrt{۳}}{۳}, \sqrt{۳}$$

تصاعدی حسابی با قدر نسبت $d = \frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$ تشکیل می‌دهند.

لگاریتم و تابع لگاریتمی

۱۵۶. ۱) $\log_{۲} ۱۶ = ۴$ و $\log_{۱۶} ۲ = \frac{۱}{۴}$، پس

$$\log_{۲} ۱۶ + \log_{۱۶} ۲ = ۴ + \frac{۱}{۴} = \frac{۱۷}{۴};$$

۲) پاسخ. $۴\frac{۱}{۴}$؛ ۳) به ترتیب داریم:

$$\log_{۱۲۵} ۶۲۵ = \frac{\log_{۵} ۶۲۵}{\log_{۵} ۱۲۵} = \frac{۴}{۳};\ \log_{۲۷} ۸۱ = \frac{\log_{۳} ۸۱}{\log_{۳} ۲۷} = \frac{۴}{۳};$$
$$\log_{۱۲۵} ۶۲۵ - \log_{۲۷} ۸۱ = ۰$$

$$۴)\ \log_{۲۱} ۷ + \log_{۲۱} ۳ = \log_{۲۱}(۷ \times ۳) = \log_{۲۱} ۲۱ = ۱;$$

$$۵)\ \log_۲\left(\frac{۲}{۳}\right) + \log_۴\left(\frac{۹}{۴}\right) = \log_۲\left(\frac{۲}{۳}\right) + \frac{\log_۲\left(\frac{۳}{۲}\right)^۲}{\log_۲ ۴} =$$

$$= (\log_۲ ۲ - \log_۲ ۳) + \frac{۲(\log_۲ ۳ - \log_۲ ۲)}{۲} =$$

$$= (\log_۲ ۲ - \log_۲ ۳) + (\log_۲ ۳ - \log_۲ ۲) = ۰;$$

۶) پاسخ. ۱؛ ۷) راهنمایی. $\log_۳ ۲۷ = \frac{\log_۴ ۲۷}{\log_۴ ۳}$. پاسخ. $\frac{۵}{۲}$؛

$$۸)\ \frac{\log_۵ ۱۶ - \log_۵ ۸}{\log_۵ ۱۲۸} = \frac{\log_۵ ۲}{\log_۵ ۱۲۸} = \log_{۱۲۸} ۲ = \frac{۱}{۷};$$

$$۹)\ \log_۵ ۲۵۰ = \log_۵ ۱۲۵ + \log_۵ ۲ = ۳ + \log_۵ ۲;$$

$$\log_{۵۰} ۵ = \frac{\log_۵ ۵}{\log_۵ ۵۰} = \frac{۱}{\log_۵ ۲۵ + \log_۵ ۲} = \frac{۱}{۲ + \log_۵ ۲};$$

$$\log_۵ ۱۰ = \log_۵ ۵ + \log_۵ ۲ = ۱ + \log_۵ ۲;$$

$$\log_{۱۲۵۰} ۵ = \frac{\log_۵ ۵}{\log_۵ ۶۲۵ + \log_۵ ۲} = \frac{۱}{۴ + \log_۵ ۲}$$

پاسخ. ۲؛ ۱۰) پاسخ. ۳.

۱۵۷. ۱) پاسخ. $\frac{a^۲b^۳}{c^۵}$؛ ۲) پاسخ. $x = a\sqrt[n]{\frac{a+b}{a-b}}$؛

$$۳)\ \lg x = -\lg\sqrt{a} + \frac{۱}{۴}[\lg b - \lg\sqrt[۳]{a^۲} + \lg\sqrt[۳]{(a-b)^۲} -$$

$$-\lg\sqrt{a+b} = -\lg\sqrt{a} + \frac{۱}{۴}\lg\frac{b \cdot \sqrt[۳]{(a-b)^۲}}{\sqrt[۳]{a^۲} \cdot \sqrt{a+b}} =$$

$$= \lg\frac{۱}{\sqrt{a}}\sqrt[۴]{\frac{b \cdot \sqrt[۳]{(a-b)^۲}}{\sqrt[۳]{a^۲} \cdot \sqrt{a+b}}};$$

$$x = \frac{۱}{\sqrt{a}} \sqrt[۴]{\frac{b \cdot \sqrt[۳]{(a-b)^۲}}{\sqrt[۳]{a^۲} \cdot \sqrt{a+b}}}$$

۴) پاسخ. $x = ۷$؛

۵) معادلهٔ مفروض، منجر به این معادله می‌شود:

$$(x-۱)(۵x+۳) = \left(\frac{۱}{۶}\right)^{-۲} = ۳۶ \Rightarrow ۵x^۲ - ۲x - ۳۹ = ۰$$

از آن‌جا $x_۱ = -\frac{۱۳}{۵}$ و $x_۲ = ۳$. عدد $-\frac{۱۳}{۵}$ در معادله صدق نمی‌کند. معادله، یک جواب منحصر دارد: ($x = ۳$).

۶) در سمت راست برابری، به مبنای a می‌رویم:

$$\log_{a^۲}(۳ - \sqrt{۱+x}) = \frac{\log_a(۳-\sqrt{۱+x})}{\log_a(a^۲)} =$$

$$= \frac{۱}{۲}\log_a(۳-\sqrt{۱+x});$$

در این صورت، به معادلهٔ زیر می‌رسیم:

$$۲\log_a(۱-\sqrt{۱+x} - \log_a(۳-\sqrt{۱+x}) = ۰$$

از آن‌جا $\log_a \frac{(۱-\sqrt{۱+x})^۲}{۳-\sqrt{۱+x}} = ۰$. در نتیجه

$$\frac{(۱-\sqrt{۱+x})^۲}{۳-\sqrt{۱+x}} = ۱ \Rightarrow (۱-\sqrt{۱+x})^۲ = ۳ - \sqrt{۱+x}$$

که اگر پرانتز را به توان برسانیم، بعد از ساده کردن به دست می‌آید:

$$x - ۱ = \sqrt{۱+x} \Rightarrow x^۲ - ۳x = ۰ \Rightarrow x_۱ = ۰, x_۲ = ۳$$

اگر این دو مقدار x را در معادلهٔ اصلی قرار دهیم، قانع می‌شویم که هیچ کدام در آن صدق نمی‌کند، یعنی معادله جواب ندارد.

۷) معادلهٔ مفروض را می‌توان به این صورت نوشت:

$$\log_3(4 \times 3^{x-1} - 1) = \log_3(3^{2x-1}) \Rightarrow 4 \times 3^{x-1} - 1 = 3^{2x-1}$$

این معادلهٔ نمایی، نسبت به 3^x، معادله‌ای درجه دوم است. فرض می‌کنیم $y = 3^x$، به این معادله می‌رسیم:

$$y^2 - 4y + 3 = 0 \Rightarrow y_1 = 1, y_2 = 3$$

اگر $1 = 3^x$، آن وقت $x = 0$، و اگر $3 = 3^x$، آن وقت $x = 1$. آزمایش روشن می‌کند، هر دو عدد در معادلهٔ اصلی صدق می‌کنند؛

۸) پاسخ. $x = 3$؛

۹) در عبارتی که در سمت چپ معادله قرار دارد، به مبنای a^2 می‌رویم:

$$\log_{x^2} a = \frac{\log_{a^2} a}{\log_{a^2}(x^2)} = \frac{\frac{1}{2}}{2\log_{a^2} x} = \frac{1}{4\log_{a^2} x}$$

درنتیجه، معادله به این صورت درمی‌آید:

$$\frac{1}{4\log_{a^2} x} + \log_{a^2} x = 1$$

که با فرض $\log_{a^2} x = y$ به دست می‌آید:

$$4y^2 - 4y + 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$$

یعنی $\log_{a^2} x = \frac{1}{2}$ یا $x = (a^2)^{\frac{1}{2}}$ و سرانجام $x = a$.

۱۵۸. ۱) نامعادله را به صورت $\log_۲ x > \log_۲ ۲^۴$ می‌نویسیم؛ در این صورت $x > ۲^۴$ یا $x > ۱۶$.

۲) این نامعادله را می‌توان به صورت دو نامعادله نوشت:

$$-۳ < \log_۳ x < ۳$$

یعنی باید جواب دستگاه زیر را پیدا کنیم

$$\begin{cases} \log_۳ x < ۳ \\ \log_۳ x > -۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_۳ x < \log_۳ ۲۷ \\ \log_۳ x > \log_۳ \left(\frac{۱}{۲۷}\right) \end{cases}$$

نامعادلهٔ اول به جواب $x < ۲۷$ و نامعادلهٔ دوم به جواب $x > \frac{۱}{۲۷}$ می‌رسد.

پاسخ. $\frac{۱}{۲۷} < x < ۲۷$.

۳) از نامعادله به دست می‌آید $x - ۱ < ۱۰$ یا $x > -۹$. از طرف دیگر، مقدار جلو علامت لگاریتم باید مثبت باشد، یعنی $x - ۱ > ۰$ یا $x < ۱$.

پاسخ. $-۹ < x < ۱$؛

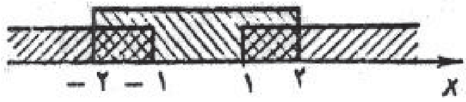
۴) از این نامعادله به سادگی به دست می‌آید:

$$x^۲ + ۷x + ۲۰ > ۱۰ \Rightarrow x^۲ + ۷x + ۱۰ > ۰ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x + ۲)(x + ۵) > ۰$$

حاصل ضرب دو پرانتز وقتی مثبت است که یا هر دو مثبت و یا هر دو منفی باشند. از آن‌جا $x > -۲$ یا $x < -۵$.

برای x، شرط دیگری به دست نمی‌آید. زیرا عبارت جلو علامت لگاریتم، همیشه مثبت است:

$$x^۲+۷x+۲۰ = \left(x + \frac{۷}{۲}\right)^۲ - \frac{۴۹}{۴} + ۲۰ = \left(x + \frac{۷}{۲}\right)^۲ + \frac{۳۱}{۴} > ۰$$



شکل ۸۷

۵) اگر فرض کنیم $y = \lg\sqrt{x}$، به این نامعادله می‌رسیم:

$$y^2 - 3y + 2 < 0 \Rightarrow (y-1)(y-2) < 0$$

حاصل ضرب دو پرانتز وقتی منفی است که یکی از آن‌ها مثبت و دیگری منفی باشد؛ از آن‌جا به جواب $1 < y < 2$ می‌رسد.

نامعادلهٔ $\lg\sqrt{x} > 1$ با نامعادلهٔ $\sqrt{x} > 10$ و نامعادلهٔ $\lg\sqrt{x} < 2$ با نامعادلهٔ $0 < \sqrt{x} < 100$ هم‌ارز است.

پاسخ. $10^2 < x < 10^4$.

۶) نامعادله به صورت $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 1) > \log_{\frac{1}{2}} 3$ درمی‌آید.

در حالت $0 < a < 1$، نامعادلهٔ $\log_a x > b$، هم ارز است با نامعادلهٔ $0 < x < a^b$. به این ترتیب، به این نامعادله می‌رسیم:

$$0 < x^2 - 1 < 3$$

از $x^2 - 1 > 0$ به دست می‌آید $x < -1$ یا $x > 1$؛ از نامعادلهٔ $x^2 - 1 < 3$ به دست می‌آید $-2 < x < 2$ که، جواب مشترک آن‌ها عبارت است از:

$$-2 < x < -1 \quad \text{و} \quad 1 < x < 2$$

(شکل ۸۷ را ببینید).

۷) با فرض $\log_a x = y$ به دست می‌آید:

$$\frac{1 + y^2}{1 + y} > 1 \Rightarrow \frac{y^2 - y}{1 + y} > 0$$

که با نامعادلهٔ $y(y-۱)(y+۱) > ۰$ (با فرض $y \neq -۱$) هم‌ارز است. در یک جدول، علامت هریک از عامل‌های y، $y - ۱$، $y + ۱$ و، سپس، علامت حاصل ضرب آن‌ها را پیدا می‌کنیم:

y	$-\infty$ تا -۱	-۱ تا ۰	۰ تا ۱	۱ تا $+\infty$
y	$-$	$-$	$+$	$+$
$y-۱$	$-$	$-$	$-$	$+$
$y+۱$	$-$	$+$	$+$	$+$
$y(y^۲-۱)$	$-$	$+$	$-$	$+$

بنابراین $y > ۱$ یا $-۱ < y < ۰$ و با جانشین کردن مقدار y:

$$-۱ < \log_a x < ۰ \text{ و } \log_a x > ۱$$

از نامعادلهٔ اول به دست می‌آید $۰ < x < a$. نامعادلهٔ دوم، هم‌ارز با دستگاه زیر است:

$$\begin{cases} \log_a x < ۰ \\ \log_a x > -۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > ۱ \\ ۰ < x < \frac{۱}{a} \end{cases} \Rightarrow ۱ < x < \frac{۱}{a}$$

پاسخ. $۰ < x < a$ و $۱ < x < \frac{۱}{a}$.

۱۵۹. ۱) می‌دانیم لگاریتم هر عدد مثبت در مبنای همان عدد، برابر واحد است؛ در ضمن، اگر مبنا بزرگتر از واحد باشد، عدد بزرگتر، لگاریتم بزرگتری دارد.

در مسالهٔ ما $\log_{۱۱} ۱۱ = ۱$، ولی $۱۱ > ۱۰$، پس

$$\log_{۱۱} ۱۰ < \log_{۱۱} ۱۱ = ۱$$

از طرف دیگر $\log_{۱۰} ۱۰ = ۱$، بنابراین

$$\log_{۱۰} ۱۱ > \log_{۱۰} ۱۰ = ۱$$

به این ترتیب $\log_{11} 10 < 1$ و $\log_{10} 11 > 1$، پس

$$\log_{11} 10 < \log_{10} 11;$$

۲) شبیه تمرین قبل

$$\log_{14} 15 > \log_{14} 14 = 1, \log_{16} 15 < \log_{16} 16 = 1$$

بنابراین $\log_{16} 15 < \log_{14} 15$؛

۳) لگاریتم‌ها را به مبنای a می‌بریم:

$$\log_5 a = \frac{\log_a a}{\log_a 5} = \frac{1}{\log_a 5}, \log_6 a = \frac{1}{\log_a 6}$$

اگر $a > 1$، آن وقت $\log_a 5 < \log_a 6$ و

$$\frac{1}{\log_a 6} < \frac{1}{\log_a 5} \Rightarrow \log_5 a > \log_6 a \ (a > 1)$$

اگر $a = 1$، آن وقت $\log_5 a = \log_6 a$.

اگر $a < 1$، آن وقت $\log_a 5 > \log_a 6$ و $\frac{1}{\log_a 5} > \frac{1}{\log_a 6}$،

پس

$$\log_6 a > \log_5 a \ (0 < a < 1)$$

۴) $5 \log_3 4$ و $6 \log_5 5$ را در نظر می‌گیریم. داریم:

$$5 \log_3 4 = \log_3(4^5) = \log_3(1024) > \log_3 729 = 6;$$

$$5 \log_5 6 = \log_5(6^5) = \log_5(7776) < \log_5 15625 = 6$$

پس $5 \log_3 4 > 5 \log_5 6$ و $\log_3 4 > \log_5 6$.

۵) به یاد می‌آوریم که میانگین هندسی دو عدد مثبت، از میانگین حسابی آن‌ها، بزرگتر نیست، یعنی برای $a > ۰$ و $b > ۰$:

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{۲}$$

در ضمن، می‌دانیم برای a و b مثبت و مخالف واحد، داریم:

$$\log_b a \log_a b = ۱ \text{ یا } \log_b a = \frac{۱}{\log_a b}$$

نسبت $\frac{\lg ۱۱}{\log_۹ ۱۰}$ را A می‌نامیم. A مقداری است مثبت (چرا؟)، بنابراین

$$\sqrt{A} = \sqrt{\frac{\lg ۱۱}{\log_۹ ۱۰}} = \sqrt{\lg ۱۱ \cdot \lg ۹} < \frac{\lg ۱۱ + \lg ۹}{۲} =$$
$$= \frac{۱}{۲}\lg ۹۹ < \frac{۱}{۲}\lg ۱۰۰ = ۱$$

به این ترتیب $\sqrt{A} < ۱$ و $۰ < A < ۱$، یعنی

$$\frac{\lg ۱۱}{\log_۹ ۱۰} < ۱ \Rightarrow \log_۹ ۱۰ > \lg ۱۱$$

یادداشت. با همین روش می‌توان، با شرط $a > ۱$، ثابت کرد:

$$\log_a(a+۱) > \log_{a+۱}(a+۲)$$

مثلاً این زنجیرهٔ نابرابری‌ها درست‌اند:

$$\log_{۲۰} ۲۱ > \log_{۲۱} ۲۲ > \log_{۲۲} ۲۳ > \log_{۲۳} ۲۴ > ۰$$

۶) علامت تفاضل دو عدد را پیدا می‌کنیم؛ مثبت یا منفی بودن این تفاضل، نشان می‌دهد، کدام بزرگترند.

$$M = \log_{۷} ۱۰ - \log_{۱۱} ۱۳ = \log_{۷} ۱۰ - \frac{\log_{۷} ۱۳}{\log_{۷} ۱۱} =$$
$$= \frac{\log_{۷} ۱۰ \cdot \log_{۷} ۱۱ - \log_{۷} ۱۳}{\log_{۷} ۱۱}$$

در ضمن داریم:

$$\log_{۷} ۱۰ = \log_{۷}\left(۷ \times \frac{۱۰}{۷}\right) = ۱ + \log_{۷}\left(\frac{۱۰}{۷}\right),$$
$$\log_{۷} ۱۱ = \log_{۷}\left(۷ \times \frac{۱۱}{۷}\right) = ۱ + \log_{۷}\left(\frac{۱۱}{۷}\right),$$
$$\log_{۷} ۱۳ = \log_{۷}\left(۷ \times \frac{۱۳}{۷}\right) = ۱ + \log_{۷}\left(\frac{۱۳}{۷}\right)$$

بنابراین

$$M = \frac{۱}{\log_{۷} ۱۱}\left[\left(۱ + \log_{۷}\frac{۱۰}{۷}\right)\left(۱ + \log_{۷}\frac{۱۱}{۷}\right) - \left(۱ + \log_{۷}\frac{۱۳}{۷}\right)\right] =$$
$$= \frac{۱}{\log_{۷} ۱۱}\left[\left(\log_{۷}\frac{۱۰}{۷} + \log_{۷}\frac{۱۱}{۷} - \log_{۷}\frac{۱۳}{۷}\right) + \log_{۷}\frac{۱۰}{۷}\log_{۷}\frac{۱۱}{۷}\right] =$$
$$= \frac{۱}{\log_{۷} ۱۱}\left(\log_{۷}\frac{۱۰ \times ۱۱ \times ۷}{۷ \times ۷ \times ۱۳} + \log_{۷}\frac{۱۰}{۷}\log_{۷}\frac{۱۱}{۷}\right) =$$
$$= \frac{۱}{\log_{۷} ۱۱}\left(\log_{۷}\frac{۱۱۰}{۹۱} + \log_{۷}\frac{۱۰}{۷}\log_{۷}\frac{۱۱}{۷}\right)$$

می‌دانیم به شرط $a > ۱$ و $b > ۱$، مقدار $\log_b a$ عددی مثبت است، یعنی

$$\log_{۷} ۱۱ > ۰, \log_{۷}\frac{۱۱۰}{۹۱} > ۰, \log_{۷}\frac{۱۰}{۷} > ۰, \log_{۷}\frac{۱۱}{۷} > ۰$$

بنابراین $M > ۰$ و $\log_{۱۱} ۱۳ > \log_{۷} ۱۰$.

۱۶۰. باید مقدارهایی از متغیر مستقل (در این‌جا x) را پیدا کنیم که، به ازای هریک از آن‌ها، مقدار کاملاً معینی برای متغیر تابع (y) به دست آید. این مقدارهای x را، دامنه یا حوزهٔ تعریف تابع و یا مقدارهای قابل قبول x گویند.

۱) چون عددهای منفی لگاریتم ندارند (و همچنین، عدد صفر)، باید داشته باشیم:

$$-۴x > ۰ \Rightarrow x < ۰;$$

۲) پاسخ. $x > -\frac{۹}{۵}$؛

۳) $x^۲ - ۱ > ۰$؛ از آن‌جا $x < -۱$ یا $x > ۱$ (خودتان محاسبه کنید).

۴) پاسخ. $x \neq \pm\sqrt{۳}$.

۱۶۱.

$$۱)\ \log_۶ ۲ = \log_۶ \left(\frac{۶}{۳}\right) = \log_۶ ۶ - \log_۶ ۳ = ۱ - a;$$

$$۲)\ \log_{۲۴} ۴۸ = \frac{\log_۶ ۴۸}{\log_۶ ۲۴} = \frac{\log_۶(۳ \times ۱۶)}{\log_۶(۳ \times ۸)} =$$

$$= \frac{\log_۶ ۳ + \log_۶ \left(\frac{۶}{۳}\right)^۴}{\log_۶ ۳ + \log_۶ \left(\frac{۶}{۳}\right)^۳} =$$

$$= \frac{a + ۴(\log_۶ ۶ - \log_۶ ۳)}{a + ۳(\log_۶ ۶ - \log_۶ ۳)} = \frac{۴ - ۳a}{۳ - ۲a};$$

$$۳)\ \log_۳(\sqrt{۶})^۵ = ۵\log_۳ \sqrt{۶} = \frac{۵}{۲}\log_۳ ۶ = \frac{۵}{۲\log_۶ ۳} = \frac{۵}{۲a};$$

$$۴)\ \log_{۳\sqrt{۶}} ۱۸ = \frac{\log_۶(۶ \times ۳)}{\log_۶(۳\sqrt{۶})} =$$

$$= \frac{\log_۶ ۶ + \log_۶ ۳}{\log_۶ ۳ + \log_۶ \sqrt{۶}} = \frac{۱ + a}{a + \frac{۱}{۲}} = \frac{۲(a + ۱)}{۲a + ۱}$$

۱۶۲. ۱) چون $۳/۳۸ = \frac{۲ \times ۱۳^۲}{۱۰۰}$، داریم:

$$\log_۵ ۳/۳۸ = \frac{\lg ۲ + ۲\lg ۱۳ - \lg ۱۰۰}{\lg ۱۰ - \lg ۲} = \frac{a + ۲b - ۲}{۱ - a};$$

۲) $۶۰ = ۱۲ \times ۵$ و $۲۷۵ = ۱۱ \times ۵^۲$؛ در ضمن

$$\log_{۱۲} ۶۰ = \log_{۱۲} ۱۲ + \log_{۱۲} ۵ = ۱ + a,$$

$$\log_{۱۲} ۲۷۵ = \log_{۱۲} ۱۱ + ۲\log_{۱۲} ۵ = b + ۲a,$$

$$\log_{۲۷۵} ۶۰ = \frac{\log_{۱۲} ۶۰}{\log_{۱۲} ۲۷۵} = \frac{a + ۱}{۲a + b};$$

۳) اولاً چون $\log_۲ ۳ = a$ پس $\log_۳ ۲ = \frac{۱}{a}$ و

$$\log_۳ ۳۰ = \log_۳(۲ \times ۳ \times ۵) =$$

$$= \log_۳ ۲ + \log_۳ ۳ + \log_۳ ۵ = \frac{۱}{a} + ۱ + b,$$

$$\log_۳ ۶۰ = \log_۳(۲^۲ + ۳ \times ۵) = \frac{۲}{a} + ۱ + b;$$

$$\log_{۶۰} ۳۰ = \frac{\log_۳ ۳۰}{\log_۳ ۶۰} = \frac{\frac{۱}{a} + ۱ + b}{\frac{۲}{a} + ۱ + b} = \frac{ab + a + ۱}{ab + a + ۲};$$

ثانیاً. پاسخ. $\frac{a(۲b + ۱)}{۲ab + a + ۲}$.

۱۶۳. *راهنمایی.* به مبنای p بروید.

پاسخ. ۱) $(\text{۱۱} - \text{۳}\sqrt{\text{۵}})\frac{\text{۱}}{\text{۴}}$؛ ۲) $-\frac{\text{۲}}{\text{۳}}(\text{۲۷} + \text{۱۲}\sqrt{\text{۵}})$.

۱۶۴. ۱) در مسالهٔ ۱۵۹، در یادداشت پایان تمرین ۵)، این نابرابری را آوردیم که برای $a > \text{۱}$ درست است.

$$\log_a(a+\text{۱}) > \log_{a+\text{۱}}(a+\text{۲})$$

بنابراین $\log_{\text{۲}} \text{۳} > \log_{\text{۳}} \text{۴}$.

ولی در این‌جا، راه حل دیگری را می‌آوریم (روش پیدا کردن تقریب‌ها). درستی این نابرابری‌ها روشن است:

$$\text{۲}^{\frac{\text{۳}}{\text{۲}}} = \sqrt{\text{۸}} < \text{۳};\ \text{۳}^{\frac{\text{۳}}{\text{۲}}} = \sqrt{\text{۲۷}} > \text{۴}$$

بنابراین

$$\log_{\text{۲}} \text{۳} > \frac{\text{۳}}{\text{۲}}, \log_{\text{۳}} \text{۴} < \frac{\text{۳}}{\text{۲}};\ \log_{\text{۲}} \text{۳} > \log_{\text{۳}} \text{۴}$$

۲) به ترتیب داریم:

$$\log_{\text{۲}} \text{۵} - \text{۲} = \log_{\text{۲}} \text{۵} - \log_{\text{۲}} \text{۴} = \log_{\text{۲}}\left(\frac{\text{۵}}{\text{۴}}\right)$$

و چون $\frac{\text{۵}}{\text{۴}} > \frac{\text{۱۱}}{\text{۹}}$، پس

$$\log_{\text{۲}}\left(\frac{\text{۵}}{\text{۴}}\right) > \log_{\text{۲}}\left(\frac{\text{۱۱}}{\text{۹}}\right) > \log_{\text{۳}}\left(\frac{\text{۱۱}}{\text{۹}}\right) = \log_{\text{۳}} \text{۱۱} - \text{۲}$$

یعنی $\log_{\text{۲}} \text{۵} - \text{۲} > \log_{\text{۳}} \text{۱۱} - \text{۲}$ و $\log_{\text{۲}} \text{۵} > \log_{\text{۳}} \text{۱۱}$.

۳) $\log_{\text{۲}} \text{۵} - \text{۲} = \log_{\text{۲}}\left(\frac{\text{۵}}{\text{۴}}\right)$ و $\log_{\text{۳}} \text{۱۲} - \text{۲} = \log_{\text{۳}}\left(\frac{\text{۴}}{\text{۳}}\right)$.

بنابراین، باید عدد $\log_{\text{۲}}\left(\frac{\text{۵}}{\text{۴}}\right)$ را با $\log_{\text{۳}}\left(\frac{\text{۴}}{\text{۳}}\right)$ مقایسه کنیم: در واقع باید

$۳^{\log_۲(\frac{۵}{۴})}$ را با $\frac{۴}{۳}$ مقایسه کنیم، زیرا اگر از این دو عدد در مبنای ۳ لگاریتم بگیریم، به همان دو عدد $\log_۲\left(\frac{۵}{۴}\right)$ و $\log_۳\left(\frac{۴}{۳}\right)$ می‌رسیم. ولی

$$۳^{\lg_۲(\frac{۵}{۴})} = \left(\frac{۵}{۴}\right)^{\log_۲ ۳}$$

(اگر از دو طرف در مبنای ۲ لگاریتم بگیریم، به یک برابری روشن می‌رسیم).
پس باید دو عدد

$$\left(\frac{۵}{۴}\right)^{\log_۲ ۳} \text{ و } \frac{۴}{۳}$$

را با هم مقایسه کنیم. داریم $\log_۲ ۳ < \frac{۳}{۲}$ (چرا؟)، پس

$$\left(\frac{۵}{۴}\right)^{\log_۲ ۳} > \left(\frac{۵}{۴}\right)^{\frac{۳}{۲}} = \left(\frac{۱۲۵}{۶۴}\right)^{\frac{۱}{۲}} > \left(\frac{۱۶}{۹}\right)^{\frac{۱}{۲}}$$

(زیرا $\frac{۱۱۲۵}{۵۷۶} = \frac{۱۲۵}{۶۴}$ و $\frac{۱۰۲۴}{۵۷۶} = \frac{۱۶}{۹}$). بنابراین

$$\left(\frac{۵}{۴}\right)^{\log_۲ ۳} > \frac{۴}{۳} \Rightarrow \log_۲ ۵ > \log_۳ ۱۲$$

۴) از آن‌جا که

$$۲^{\frac{۷}{۳}} = \sqrt[۳]{۲^۷} = \sqrt[۳]{۱۲۸} > ۵$$

بنابراین $\log_۲ ۵ < \frac{۷}{۳}$. بنابراین

$$۳^{\log_۲ ۵} < ۳^{\frac{۷}{۳}} = \sqrt[۳]{۳^۷} = \sqrt[۳]{۲۱۸۷} < \sqrt[۳]{۲۱۹۷} = ۱۳;$$

$$۳^{\log_۲ ۵} < ۱۳ \Rightarrow \log_۲ ۵ < \log_۳ ۱۳$$

۱۶۵. ۱) از دو طرف برابری، در مبنای ۳، لگاریتم می‌گیریم:

$$x\log_۳ ۳ + \frac{x}{x+۱}\log_۳(۲^۳) = \log_۳(۳^۲ \times ۲^۲)$$

اگر عمل‌ها را انجام دهیم و $\log_۳ ۲$ را a بنامیم، سرانجام به این معادلهٔ درجه دوم می‌رسیم:

$$x^۲ + (a-۱)x - ۲(a+۱) = ۰$$

پاسخ. $x_۱ = ۲$، $x_۲ = -۱ - \log_۳ ۲$.

۲) *راهنمایی*. دو طرف برابری را بر ۵^x تقسیم کنید. *پاسخ*. $x = ۲$ (می‌توان ثابت کرد، معادله جواب دیگری ندارد؛ ولی برای استدلال دقیق در این باره، باید اندکی صبر کنید).

۳) فرض می‌کنیم $\frac{۱-۲x}{۳x-۲} = t$؛ از آن به دست می‌آید:

$$x = \frac{۲t+۱}{۳t+۲} \text{ و } \frac{۱-x}{۳x-۲} = -(t+۱)$$

اکنون، اگر معادله را بر حسب t بنویسیم و، سپس فرض کنیم $y = ۶^t$، به این معادلهٔ درجه دوم، بر حسب مجهول y، می‌رسیم:

$$۶y^۲ + ۲۳y - ۴ = ۰ \Rightarrow y_۱ = \frac{۱}{۶}, y_۲ = -۳$$

$y_۲$ قابل قبول نیست، زیرا ۶^t عددی مثبت است،

$$y_۱ = \frac{۱}{۶} \Rightarrow ۶^t = \frac{۱}{۶} = (۶)^{-۱} \Rightarrow t = -۱$$

به این ترتیب، از معادلهٔ $\frac{۱-۲x}{۳x-۲} = -۱$، مقدار x به دست می‌آید.

پاسخ. $x = 1$.

۴) از دو طرف در مبنای ۳ لگاریتم می‌گیریم؛ در ضمن روشن است:

$$\log_x 12 = \frac{\log_3 12}{\log_3 x} = \frac{1 + 2\log_3 2}{\log_3 x}$$

اگر فرض کنیم $\log_3 x = y$ و $\log_3 2 = a$، آن وقت معادلهٔ مفروض به این صورت درمی‌آید:

$$y^2 - (a+2)y - (2a+1)(a-1) = 0$$

از آن‌جا: $y_1 = 2a + 1$ و $y_2 = 1 - a$. بنابراین

$$\log_3 x = 2\log_3 2 + 1 = \log_3 12 \Rightarrow x_1 = 12;$$
$$\log_3 x = 1 - \log_3 2 = \log_3\left(\frac{3}{2}\right) \Rightarrow x_2 = \frac{3}{2}$$

۵) از دو طرف برابری، در مبنای ۲ لگاریتم بگیرید؛ با فرض $y = \log_2 x$ و $a = \log_2 3$، به این معادلهٔ درجه دوم می‌رسید.

$$y^2 + 2(a-1)y - (3a^2 + 2a - 1) = 0$$

از آن‌جا $y_1 = a + 1$ و $y_2 = 1 - 3a$؛ درنتیجه

$$\log_2 x = \log_2 3 + 1 = \log_2 6 \Rightarrow x_1 = 6;$$
$$\log_2 x = 1 - 3\log_2 3 = \log_2\left(\frac{2}{27}\right) \Rightarrow x_2 = \frac{2}{27}$$

۶) $a = \log_2 x$ می‌گیریم و معادله را، نسبت به مجهول x منظم می‌کنیم:

$$x^2 + (a-4)x - 3(a-1) = 0 \Rightarrow x_1 = 3, x_2 = 1 - a$$

یکی از ریشه‌های معادله برابر ۳ است و ریشه یا ریشه‌های دیگر را باید از این معادله به دست آورد:

$$x = ۱ - \log_۲ x = \log_۲\left(\frac{۲}{x}\right)$$

از این معادله، به معادلهٔ $\frac{۲}{x} = ۲^x$ می‌رسیم. $x = ۱$ در این معادله صدق می‌کند. ثابت می‌کنیم، این معادله، ریشهٔ دیگری ندارد. روشن است که x نمی‌تواند منفی باشد، زیرا به ازای $x < ۰$، مقدار سمت چپ برابری (یعنی ۲^x) مثبت و مقدار سمت راست آن (یعنی $\frac{۲}{x}$) منفی می‌شود. آیا x می‌تواند بزرگتر از واحد باشد؟ اگر $x > ۱$، آن وقت $۲^x > ۲$ و $\frac{۲}{x} < ۲$. همچنین مقدار x، نمی‌تواند بین صفر و واحد باشد، زیرا اگر $۰ < x < ۱$، آن وقت $۲^x < ۲$ و $\frac{۲}{x} > ۲$.

پاسخ. $x_۱ = ۳$، $x_۲ = ۱$.

۱۶۶. با توجه به مبنای لگاریتم، باید داشته باشیم $۴ < a < ۱۰$. از برابری

$$-x^۲ + ۴x - ۳ = (x - ۰/۲۵a - ۱)(x - ۰/۵a - ۲)$$

به این معادلهٔ درجه دوم می‌رسیم:

$$۱۶x^۲ - ۲(۳a + ۲۸)x + a^۲ + ۸a + ۴۰ = ۰ \qquad (*)$$

برای این که معادلهٔ مفروض تنها یک جواب داشته باشد، باید معادله (*) دارای دو ریشهٔ برابر باشد، یعنی مبین آن برابر صفر شود:

$$(۳a + ۲۸)^۲ - ۱۶(a^۲ + ۸a + ۴۰) = ۰$$

از آن‌جا $a = \frac{۲۰ \pm ۸\sqrt{۲۲}}{۷}$، که با توجه به شرط $۴ < a < ۱۰$، جواب منفی قابل قبول نیست.

پاسخ. $\frac{۲۰ + ۸\sqrt{۲۲}}{۷} \approx ۸/۲$.

۱۶۷. $u = x^{۲} - ۲x$ و $v = ۲|x-a| - ۱$ فرض می‌کنیم، در این صورت

$$-|x-a| = -\frac{۱}{۲}|v+۱| \Rightarrow ۴^{-|x-a|} = ۲^{-v-۱};$$
$$\log_{\sqrt{۳}}(x^{۲} - ۲x + ۳) = \log_{\sqrt{۳}}(u+۳) = ۲\log_{۳}(u+۳);$$

و برای جملهٔ اول سمت چپ معادله خواهیم داشت:

$$۴^{-|x-a|}\log_{\sqrt{۳}}(x^{۲} - x + ۳) = ۲^{-v-۱} \times ۲ \times \log_{۳}(u+۳) =$$
$$= ۲^{-v}\log_{۳}(u+۳) = \frac{۱}{۲^{v}}\log_{۳}(u+۳),$$

به همین ترتیب، برای جملهٔ دوم عبارت سمت چپ معادله، به دست می‌آید:

$$۲^{-x^{۲}+۲x} \cdot \log_{\frac{۱}{۳}}(۲|x-a| + ۲| = ۲^{-u} \cdot \log_{\frac{۱}{۳}}(v+۳) =$$
$$-۲^{-u} \times -۱ \times \log_{۳}(v+۳) = -\frac{۱}{۲^{u}} \cdot \log_{۳}(v+۳)$$

بنابراین، معادلهٔ مفروض به این صورت درمی‌آید:

$$۲^{u} \cdot \log_{۳}(u+۳) = ۲^{v} \cdot \log_{۳}(v+۳)$$

و این برابرای، تنها برای $u = v$ برقرار است؛ زیرا اگر $u > v$، آن وقت

$$۲^{u} > ۲^{v} \text{ و } \log_{۳}(u+۳) > \log_{۳}(v+۳)$$

و در نتیجه، اگر $u > v$، آن وقت

$$۲^u \log_۳(u+۳) > ۲^v \log_۳(v+۳)$$

به همین ترتیب، اگر $u < v$، آن وقت

$$۲^u \log_۳(u+۳) < ۲^v \log_۳(v+۳)$$

پس $u = v$، یعنی

$$x^۲ - ۲x = ۲|x-a| - ۱$$

این معادله، به دو معادله زیر تبدیل می‌شود:

$$x^۲ - ۲x = ۲(x-a) - ۱ \text{ و } x^۲ - ۲x = -۲(x-a) - ۱$$

و یا پس از ساده کردن

$$x^۲ - ۴x + ۲a = ۰ \text{ و } x^۲ - ۲a + ۱ = ۰$$

مساله می‌خواهد، این دو معادلهٔ درجه دوم، روی هم، سه جواب داشته باشند، و این، تنها وقتی ممکن است که یکی از معادله‌ها دارای ریشهٔ مضاعف (یعنی دو ریشهٔ برابر) و دیگری دارای دو ریشهٔ مختلف حقیقی باشد.

الف. معادلهٔ $x^۲ - ۲a + ۱ = ۰$ به‌ازای $a = \frac{۱}{۲}$ دو ریشه برابر صفر پیدا می‌کند؛ درضمن؛ به‌ازای $a = \frac{۱}{۲}$ معادلهٔ دوم، دارای دو ریشهٔ حقیقی است:

$$a = \frac{۱}{۲} : x^۲ - ۴x + ۲ = ۰ \Rightarrow x = ۲ \pm \sqrt{۲}$$

ب. معادله $x^۲ - ۴x + ۲a + ۱ = ۰$، وقتی دو ریشهٔ برابر دارد که داشته باشیم:

$$\Delta = ۲^۲ - (۲a + ۱) = ۰ \Rightarrow a = \frac{۳}{۲}$$

و به ازای $a = \frac{۳}{۲}$، معادلهٔ دیگری دارای دو ریشهٔ $\pm\sqrt{۲}$ است.

پاسخ. $a = \frac{۱}{۲}$ $(x_۱ = ۰$، $x_۲ = ۲ + \sqrt{۲}$ و $x_۳ = ۲ - \sqrt{۲})$؛

$$a = \frac{۳}{۲}(x_۱ = ۲ ،\ x_۲ = \sqrt{۲} \text{ و } x_۳ = -\sqrt{۲})$$

۱۶۸. نامعادله وقتی معنا دارد که داشته باشیم:

$$\begin{cases} x - ۵ \geq ۰ \\ x - ۴ > ۰ \\ \log_{\sqrt{۲}}(x - ۴) - ۱ \neq ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq ۵ \\ x > ۴ \\ x - ۴ \neq \sqrt{۲} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \geq ۵ \\ x \neq ۴ + \sqrt{۲} \end{cases}$$

روشن است که $x = ۵$ در نامعادله صدق می‌کند.

با فرض $x \neq ۰$ به این نامعادله می‌رسیم:

$$\log_{\sqrt{۲}}(x - ۴) > ۱ \Rightarrow x - ۴ > \sqrt{۲}$$

پاسخ. $x = ۵$ و $x > ۴ + \sqrt{۲}$.

۱۶۹. دامنهٔ معادله (یعنی مقدارهای قابل قبول x) از این دستگاه به دست می‌آید:

$$\begin{cases} ۳x - ۵ > ۰ \\ ۲ + ۵x - x^۲ > ۰ \end{cases}$$

از نامعادلهٔ اول دستگاه به جواب $x > \frac{۵}{۳}$ می‌رسیم و نامعادلهٔ دوم را می‌توانیم به ترتیب، به این صورت بنویسیم:

$$\left(x - \frac{۵}{۲}\right)^۲ - \frac{۳۳}{۴} < ۰ \Rightarrow \left(x - \frac{۵ + \sqrt{۳۳}}{۲}\right)\left(x - \frac{۵ - \sqrt{۳۳}}{۲}\right) < ۰$$

که از آن‌جا، جواب $\frac{۵ - \sqrt{۳۳}}{۲} < x < \frac{۵ + \sqrt{۳۳}}{۲}$ به دست می‌آید؛ اگر شرط $x > \frac{۵}{۳}$ را هم در نظر بگیریم، دامنهٔ معادله، چنین می‌شود:

$$\frac{۵}{۳} < x < \frac{۵ + \sqrt{۳۳}}{۲}$$

این اتحادها را در نظر می‌گیریم:

$$\log_۲ \frac{۱}{\sqrt{A}} = \log_۲ ۱ - \log_۲ \sqrt{A} = -\frac{۱}{۲} \log_۲ A;$$

$$\log_{\frac{۱}{۲۵}} B = \frac{\log_۵ B}{\log_۵(\frac{۱}{۲۵})} = \frac{\log_۵ B}{-۲} = -\frac{۱}{۲} \log_۵ B$$

و با توجه به آن‌ها، از دو طرف معادلهٔ اصلی لگاریتم می‌گیریم (مثلاً در مبنای ۲):

$$-\frac{۱}{۲} \log_۲(۳x - ۵) = -\frac{۱}{۲} \log_۵(۲ + ۵x - x^۲) \log_۲(۳x - ۵)$$

که بعد از تبدیل‌های ساده، چنین می‌شود:

$$\log_۲(۳x - ۵)[\log_۵(۲ + ۵x - x^۲) - ۱] = ۰$$

یعنی، باید ریشه‌های این دو معادله را به دست آورد:

$$\log_۲(۳x - ۵) = ۰ \quad \text{و} \quad \log_۵(۲ + ۵x - x^۲) = ۱$$

از معادلهٔ اول به دست می‌آید $x = ۲$ که قابل قبول است (زیرا در دامنهٔ معادله قرار دارد). برای معادلهٔ دوم، داریم

$$۲ + ۵x - x^۲ = ۵ \Rightarrow x^۲ - ۵x + ۳ = ۰$$

که دو جواب دارد: $x = \frac{۵ + \sqrt{۱۳}}{۲}$ و $x = \frac{۵ - \sqrt{۱۳}}{۲}$. ولی

$$\frac{۵ - \sqrt{۱۳}}{۲} \approx \frac{۵ - ۳/۶}{۲} = ۰/۷;\ \frac{۵}{۳} \approx ۱/۶$$

و $\frac{۵}{۳} > \frac{۵ - \sqrt{۱۳}}{۲}$. ریشهٔ $\frac{۵ - \sqrt{۱۳}}{۲}$ قابل قبول نیست.

پاسخ. $x_۱ = ۲$ و $x_۲ = \frac{۵ + \sqrt{۱۳}}{۲}$.

۱۷۰. جواب نامعادله باید با شرطهای $x > ۰$ و $x \neq ۱$ سازگار باشد. با این شرط‌ها، نامعادله به این صورت درمی‌آید:

$$\log_۷ x + \frac{۱}{\log_۷ x} \geq ۲ \Rightarrow \frac{(\log_۷ x - ۱)^۲}{\log_۷ x} \geq ۰$$

از آن‌جا به نامعادلهٔ سادهٔ $\log_۷ x > ۰$ می‌رسیم.

پاسخ. $x > ۱$.

۱۷۱. چون $\log_۳(۳x) = \log_۳ x + ۱$، بنابراین، معادلهٔ مفروض، چنین می‌شود:

$$\log_۳ x - ۳\sqrt{\log_۳ x} + ۲ = ۰$$

که معادلهٔ درجه دومی است نسبت به مجهول $\sqrt{\log_۳ x}$:

$$\sqrt{\log_۳ x} = ۱,\ \sqrt{\log_۳ x} = ۲$$

پاسخ. $x = ۳$ و $x = ۸۱$.

۱۷۲. مساله‌های ۱۷۲ و ۱۷۳ را به این دلیل آورده‌ایم که نشان دهیم، لگاریتم، تنها یک مفهوم انتزاعی و ذهنی نیست که ریاضی‌دانان، برای سرگرم کردن خود و دیگران، آن را پدید آورده‌اند. لگاریتم در حل بسیاری از مساله‌های مربوط به زندگی و صنعت کاربرد دارد و در بسیاری زمینه‌ها، گره‌گشای دشواری‌هاست.

الف) وزن شیر در هر پیت

$$M = ۵۰ \times ۱/۰۳۲ = ۵۱/۶ \quad \text{(کیلوگرم)}$$

مقدار t_k را از این معادله پیدا می‌کنیم:

$$\lg\frac{۲۵-۳}{۲۵-t_k} = \frac{۰/۴۳۴ \times ۰/۶۶ \times ۱۰ \times ۳/۴}{۵۱/۶ \times ۰/۹۴} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lg\frac{۲۲}{۲۵-t_k} = ۰/۲ \Rightarrow \frac{۲۲}{۲۵-t_k} = ۱/۶$$

از آن‌جا $t_k = ۱۱/۲۵$ (درجه).

ب) حجم مخزن

$$V = \frac{\pi d^۲}{۴}l = \frac{۳}{۴}\pi \approx ۲/۳۶ \text{ (متر مکعب)} = ۲۳۶۰ \text{ (لیتر)}$$

وزن شیر مخزن

$$M = ۲۳۶۰ \times ۱/۰۳ = ۲۴۳۰ \text{ (کیلوگرم)}$$

سطح کل مخزن استوانه‌ای

$$F = ۲ \times \frac{\pi d^۲}{۴} + \pi dl = ۳/۵\pi \approx ۱۱ \text{ (متر مربع)}$$

از آن‌جا

$$\lg\frac{۲۵-۳}{۲۵-t_k}=\frac{۰/۴۳۴\times ۱۱\times ۱۰\times ۳/۴}{۲۴۳۰\times ۰/۹۴}=۰/۰۷۱$$

و $t_k \approx ۶/۳$ (درجه).

به این ترتیب، بزرگ کردن ظرف، بدون هیچ تلاش فنی دیگری، می‌تواند حرارت شیر را نزدیک ۵ درجه، کمتر بالا ببرد.

۱۷۳. چون باید داشته باشیم:

$$\lg n=\frac{R_n \lg ۳۰}{R_{۳۰}}$$

به دست می‌آید:

$$\lg n=\lg(۳۰^{۲})\Rightarrow n=۹۰۰\ (\text{روز})$$

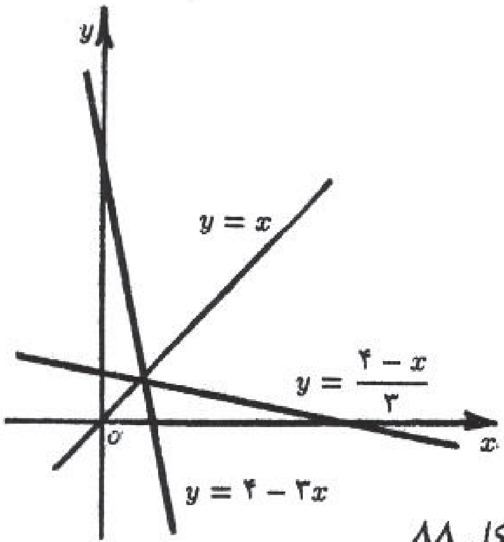
۱۷۴. ۱) تابع با ضابطهٔ $y=۴-۳x$، برای هر عدد حقیقی x معین است؛ بنابراین تابع معکوس آن هم برای $x\in \mathbf{R}$ معین است. معادلهٔ

$$y=f(x)=۴-۳x$$

ر نسبت به x حل می‌کنیم

$$x=f^{-۱}(y)=\frac{۱}{۳}(۴-y)$$

متغیر را x و تابع را y می‌نامیم، به تابع با ضابطهٔ $y=\frac{۱}{۳}(۴-x)$ می‌رسیم.
نمودارهای مربوط به $y=۴-۳x$ و $y=\frac{۱}{۳}(۴-x)$ را در یک دستگاه محورهای مختصات رسم می‌کنیم (شکل ۸۸).



شکل ۸۸

همان طور که در شکل دیده می‌شود، این دو نمودار، نسبت به خط راست $y = x$ (نیمساز ربع‌های اول و سوم) قرینه یکدیگرند.

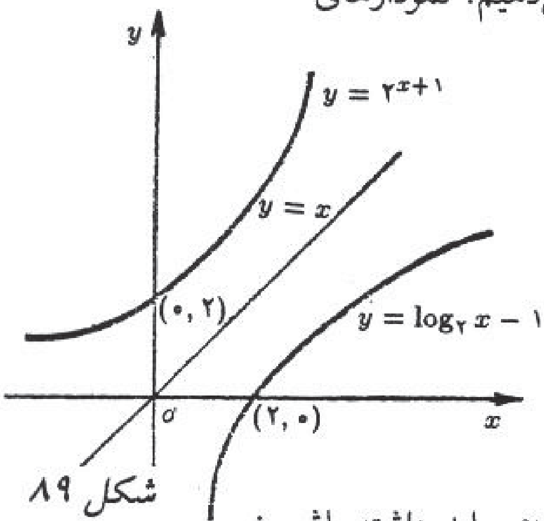
۲) تابع با ضابطهٔ $y = f(x) = ۲^{x+۱}$، به ازای همهٔ مقدارهای حقیقی x معین است و، در ضمن، با بزرگتر شدن x، مقدار y هم بزرگتر می‌شود:

$$x_۱ > x_۲ \Rightarrow f(x_۱) > f(x_۲)$$

(چنین تابعی را، *تابع صعودی* گویند). برای تابع عکس، x را بر حسب y پیدا می‌کنیم:

$$x = f^{-۱}(y) = \log_۲ y - ۱$$

(در واقع، از دو طرف برابری $y = ۲^{x+۱}$، در مبنای ۲، لگاریتم گرفته‌ایم). متغیر را با x و تابع را با y نشان می‌دهیم. نمودارهای $y = \log_۲ x - ۱$ و $y = ۲^{x+۱}$ را روی یک دستگاه محورهای مختصات رسم می‌کنیم (شکل ۸۹). این دو نمودار، نسبت به خط راست $y = x$ قرینهٔ یکدیگرند.



شکل ۸۹

۱۷۵. برای حقیقی بودن مقدار y، باید داشته باشیم:

$$\lg(\cos x) \geq ۰ \Rightarrow \cos x \geq ۱$$

ولی مقدار کسینوس نمی‌تواند از واحد بزرگتر باشد، بنابراین

$$\cos x = ۱ \Rightarrow x = ۲k\pi \ (k \in \mathbf{Z})$$

یعنی x می‌تواند مقدارهای ۰؛ ۲π، ۴π، ... -۲π، -۴π، ... را اختیار کند و مقدار y (بُرد)، به ازای هریک از این عددها، برابر صفر می‌شود.

نمودار $y = \sqrt{\lg \cos x}$، از نقطه‌های جداگانه‌ای واقع بر محور $x'x$ تشکیل شده است، به نحوی که هر دو نقطهٔ مجاور، به اندازه ۲π (به تقریب ۶٫۲۸ واحد) از یکدیگر فاصله دارند و، درضمن، مبداء مختصات، یکی از آن‌ها است.

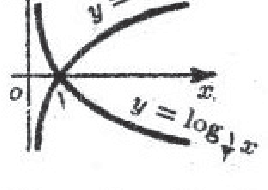
۱۷۶. اگر در تابع با ضابطهٔ $y = \log_{\frac{1}{2}} x$، به مبنای ۲ برویم، به دست می‌آید:

$$y = \frac{\log_۲ x}{\log_۲(\frac{۱}{۲})} = \frac{\log_۲ x}{-۱} = -\log_۲ x$$

یعنی، اگر $x_۰ > ۰$ را عدد دلخواهی در نظر بگیریم، داریم:

$$\log_{\frac{1}{2}} x_۰ = -\log_۲ x_۰$$

و نمودارهای $y = \log_۲ x$ و $y = \log_{\frac{1}{2}} x$، نسبت به محور $x'x$ قرینهٔ یکدیگرند.



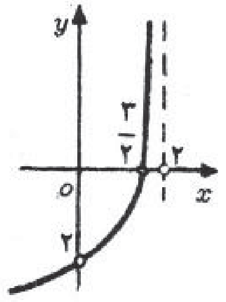
شکل ۹۰

در شکل ۹۰ نمودارهای هر دو تابع را، روی یک دستگاه محورهای مختصات نشان داده‌ایم.

۱۷۷. دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $y = \log_{\frac{1}{2}}(۴ - ۲x)$ عبارت است از $x < ۲$. نقطه‌های برخورد نمودار را با محورهای مختصات معین کنیم:

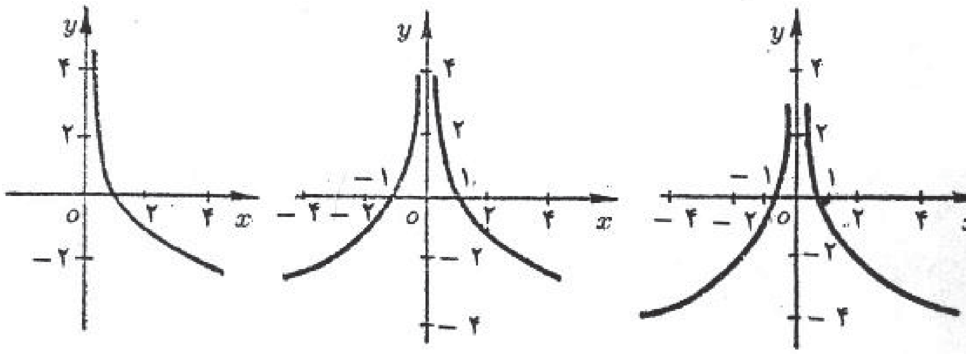
اگر $x = ۰$، آن‌گاه $y = \log_{\frac{1}{2}} ۴ = -۲$؛

اگر $y = 0$، آن‌گاه $2x - 4 = 1$ یا $x = \frac{3}{2}$.
هرچه x به ۲ نزدیکتر شود، مقدار y بزرگتر می‌شود، به نحوی که نمودار، در کنار خط راست $x = 2$ به سمت بی‌نهایت می‌رود. نمودار تابع، در شکل ۹۱ داده شده است.



شکل ۹۱

۱۷۸. برای رسم این نمودار، بهتر است ابتدا نمودار تابع با ضابطهٔ $y = \log_{\frac{1}{2}} |x|$ را رسم و، سپس آن را به اندازهٔ یک واحد، در طول oy، جابه‌جا کنیم. نمودار تابع $y = \log_{\frac{1}{2}} |x|$، نسبت به محور $y'y$ متقارن است، زیرا تابعی است زوج (با تبدیل x به $-x$، مقدار y تغییر نمی‌کند). به این ترتیب، کافی است نمودار $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ را رسم کنیم (شکل ۹۲ نمودار سمت چپ) و، سپس، قرینهٔ آن را نسبت به محور $y'y$ به دست آوریم تا شاخهٔ دوم نمودار به دست آید (نمودار وسط در شکل ۹۲). اکنون، اگر این نمودار را به اندازه یک واحد، در طول $y'y$، به طرف پایین منتقل کنیم، نمودار $y = \log_{\frac{1}{2}} |x| - 1$ به دست می‌آید (شکل ۹۲، نمودار سمت راست).



شکل ۹۲

۱۷۹. فرض می‌کنیم، برای انتشار عمل فانوس دریایی در ۱ کیلومتر (به شرطی که به وسیلهٔ هوای دور و بر جذب نشود)، شدت نوری برابر ۰/۰۱ کارسل کافی باشد. روشنایی، با شدت نور، نسبت مستقیم و با مجذور

فاصلهٔ آن از سرچشمه نور، نسبت معکوس دارد. بنابراین، برای این که شعاع عمل فانوس دریایی r برابر شود، باید شدت نور آن $r^۲$ برابر باشد؛ یعنی باید شدت نور برابر $۰/۰۱r^۲$ کارسل بشود.

همچنین، اگر نور، ضمن عبور از لایهٔ ۱ کیلومتری، ۰/۹ انرژی خود را نگه دارد، در عبور از لایهٔ ۲ کیلومتری هوا $۰/۹ \times ۰/۹$ یعنی $(۰/۹)^۲$ انرژی نوری خود و، ضمن عبور از لایهٔ r کیلومتری، به اندازهٔ $(۰/۹)^r$ انرژی نخستینِ خود را حفظ می‌کند.

برای این که چشم بتواند، نور فانوس دریایی را، از فاصلهٔ r کیلومتری تشخیص دهد، باید شدت نور فانوس را چنان اضافه کرد که $(۰/۹)^r$ برابر نیروی نور فانوس، با $۰/۰۱r^۲$ کارسل برابر بشود. یعنی شدت نخستینِ نور فانوس، برای این که به rکیلومتری برسد، باید برابر $\frac{۰/۰۱r^۲}{۰/۹^r}$ کارسل باشد (این شدت را I می‌نامیم). به این ترتیب، بستگی بین I و r، این طور بیان می‌شود:

$$I = \frac{۰/۰۱r^۲}{۰/۹^r}$$

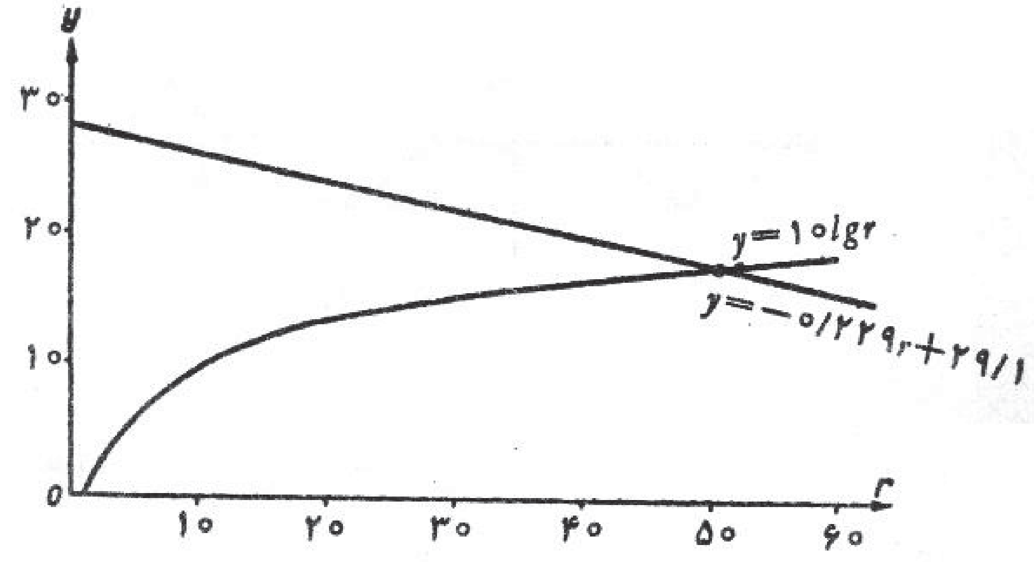
باید r را، از معادلهٔ $۶۵۰۰ = \frac{۰/۰۱r^۲}{۰/۹^r}$ به دست آورد.

معادله، را با روش رسم نمودار حل می‌کنیم. در آغاز از دو طرف معادله لگاریتم می‌گیریم. (در مبنای ۱۰):

$$\lg ۶۵۰۰ = \lg ۰/۰۱ + ۲\lg r - r\lg ۰/۹,$$

$$۳/۸۱۲۹ = -۲ + ۲\lg r - r(-۱ + ۰/۹۵۴۲),$$

$$۱۰\lg r r - ۰/۲۲۹r + ۲۹/۱$$



شکل ۹۳

مقدار r، از دستگاه زیر به دست می‌آید:

$$\begin{cases} y = ۰/۲۲۹r + ۲۹/۱ \\ y = ۱۰\lg r \end{cases}$$

نمودار تابع اول را می‌توان با دو نقطهٔ آن، و مثلاً

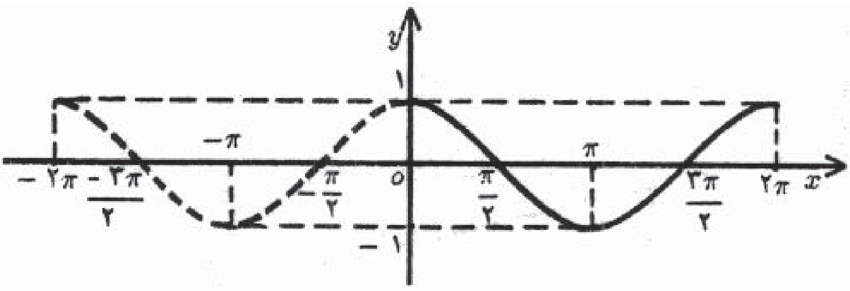
$$A(۰, ۲۹/۱),\ B(۶۰, ۱۵/۴)$$

رسم کرد.برای رسم نمودار تابع دوم، این جدول را تشکیل می‌دهیم:

r	۱	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰	۵۰	۶۰
y	۰	۱۰	۱۳	۱۴/۸	۱۶	۱۷	۱۷/۸

نقطهٔ برخورد دو نمودار (شکل ۹۳) نشان می‌دهد که:

$r \approx$ ۵۲ (کیلومتر)



شکل ۹۴

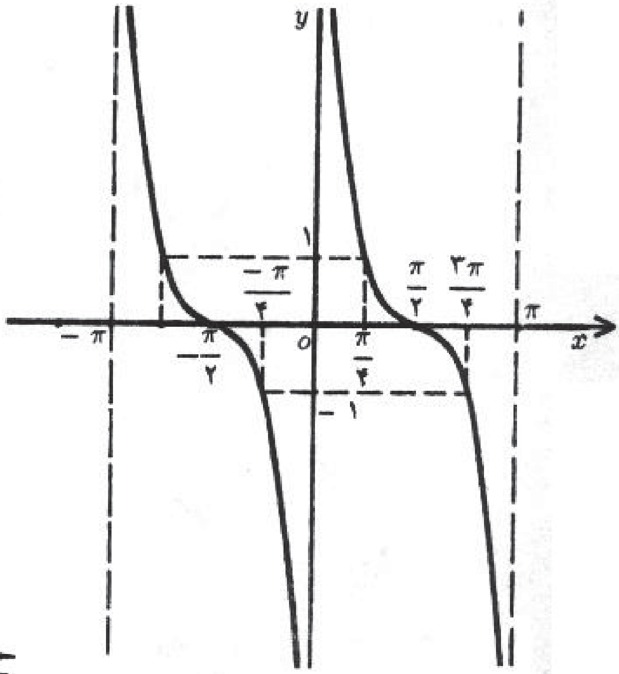
نمودار تابع‌های مثلثاتی

۱۸۰. ۱) نمودار را برای $۰ \leq x \leq ۲\pi$ رسم می‌کنیم. مقدار y، به ازای $x = ۰$ و $x = ۲\pi$ به بیشترین مقدار خود و به ازای $x = \pi$ به کمترین مقدار خود می‌رسد. نمودار در نقطه‌های $x = \frac{\pi}{۲}$ و $x = \frac{۳\pi}{۲}$، محور $x'x$ را قطع می‌کند (شکل ۹۴).

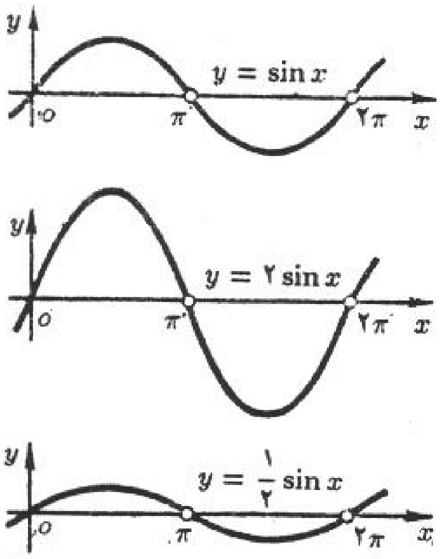
x	۰	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π
y	۱	۰	-۱	۰	۱

۲) $y = \cot x$، دورهٔ تناوبی برابر π دارد؛ به همین مناسبت باید آن را در فاصلهٔ $۰ < x < \pi$ رسم کرد. توجه کنیم $\cot x$ در نقطه‌های ۰ و π ناپیوسته است. ولی اگر x در ربع اول و نزدیک به نقطهٔ صفر باشد، مقدار y بسیار بزرگ و مثبت است، ولی وقتی در ربع دوم به π نزدیک می‌شود، مقدار y به سمت $-\infty$ می‌رود (شکل ۹۵).

x	۰	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۲}$	$\frac{۳\pi}{۴}$	π
y	$+\infty$	۱	۰	-۱	$-\infty$



شکل ۹۵



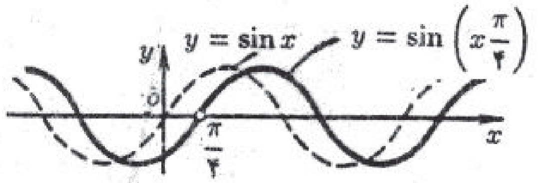
شکل ۹۶

۱۸۱. این سه نمودار را، در شکل ۹۶ می‌بینید. واحدها در سه نمودار، برابر انتخاب شده است تا بتوان آن‌ها را با هم مقایسه کرد. جدول‌ها را برای مقدارهای متناظر x و y، در بارهٔ هر نمودار، خودتان تنظیم کنید.

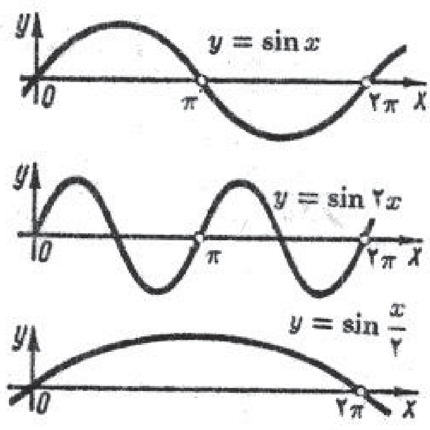
در شکل ۹۶ می‌بینید، هر چه ضریب $\sin x$ از لحاظ قدر مطلق، کوچکتر باشد، منحنی کشیده‌تر و به محور $x'x$ نزدیک‌تر می‌شود.

۱۸۲. با در دست داشتن نمودار $y = \sin x$، اگر مبداء مختصات را به نقطهٔ $(-\alpha, ۰)$ منتقل کنیم، به نمودار $y = \sin(x + \alpha)$ می‌رسیم.

در شکل ۹۷ نمودارهای $y = \sin x$ و $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{۴}\right)$ در یک دستگاه محورهای مختصات داده شده است. در این شکل $y = \sin x$ به صورت نقطه‌چین و $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{۴}\right)$ با خط کامل رسم شده‌اند. اگر مبداء مختصات را در نقطهٔ $\left(\frac{\pi}{۴}, ۰\right)$ در نظر بگیریم، منحنی با خط کامل،



شکل ۹۷



شکل ۹۸

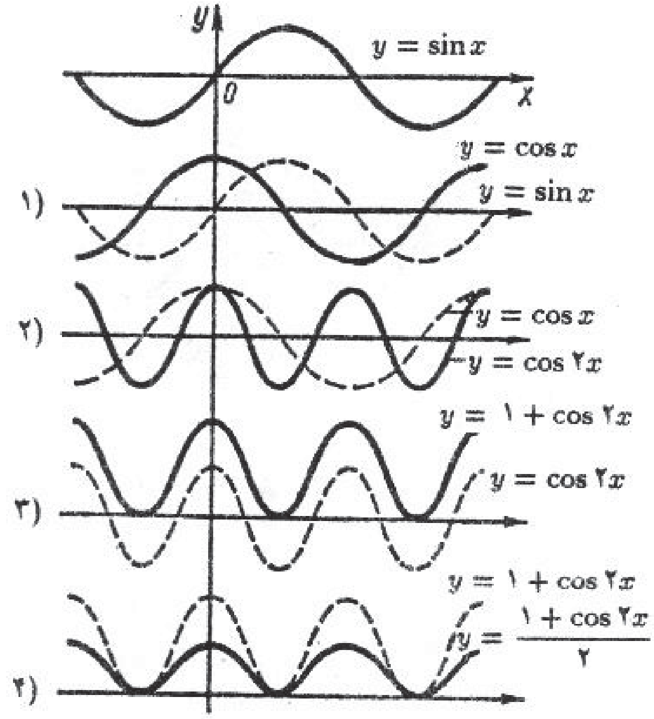
همان نمودار $y = \sin x$ خواهد شد.

۱۸۳. پاسخ را در شکل ۹۸ می‌بینید. نمودار $\sin(mx)$، با کوچکتر شدن $|m|$، بازتر و به محور $x'x$ نزدیک‌تر می‌شود.

۱۸۴. در هر حالت، دو نمودار را روی یک دستگاه محورهای مختصات رسم کرده‌ایم (شکل ۹۹). عبارت $۱ + \cos ۲x$ ، در نقطه‌های $x = ۰$ و $x = \pi$ به بیشترین مقدار خود و در نقطه‌های $x = \frac{\pi}{۲}$ و $x = \frac{۳\pi}{۲}$ به کمترین مقدار خود می‌رسد (دورهٔ تناوب $۱ + \cos ۲x$ ، عبارت است از π).

۱۸۵. برای رسم نمودار $y = \sin x + \cos x$، باید کمترین و بیشترین مقدار آن را بدانیم. ثابت می‌کنیم:

$$|\sin x + \cos x| \leq \sqrt{۲} \qquad (۱)$$



شکل ۹۹

دو طرف نابرابری (۱) مثبت‌اند و، بنابراین، اگر دو طرف را مجذور کنیم، به یک برابری هم‌ارز نابرابری (۱) می‌رسیم:

$$\sin^۲ x + \cos^۲ x + ۲\sin x\cos x \leq ۲$$

که با توجه به $\sin^۲ x + \cos^۲ x = ۱$، به دست می‌آید:

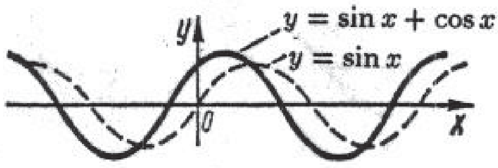
$$۲\sin x\cos x \leq ۱ \Rightarrow \sin^۲ x + \cos^۲ x - ۲\sin x\cos x \geq ۰$$

(به جای ۱، مقدارش $\sin^۲ x + \cos^۲ x$ را قرار دادیم). و سرانجام

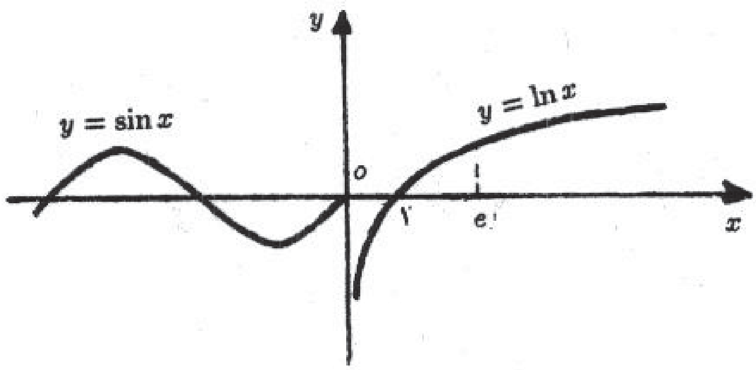
$$(\sin x - \cos x)^۲ \geq ۰$$

که درستی آن روشن است. به این ترتیب

$$-\sqrt{۲} \leq \sin x + \cos x \leq \sqrt{۲}$$



شکل ۱۰۰



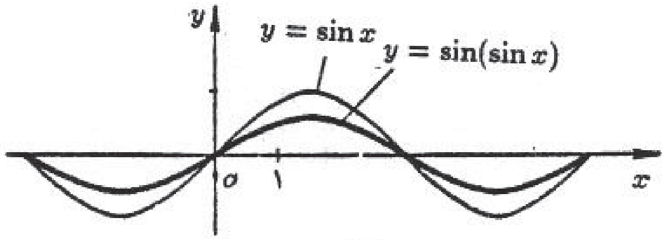
شکل ۱۰۱

در واقع، اگر فاصلهٔ $۰ \leq x \leq ۲\pi$ (دورهٔ تناوب $\sin x + \cos x$) را در نظر بگیریم، به ازای $x = \frac{\pi}{۴}$ به دست می‌آید $y = \sqrt{۲}$ (بیشترین مقدار y) و به ازای $x = \frac{۵\pi}{۴}$ به دست می‌آید $y = -\sqrt{۲}$ (کمترین مقدار y) و به ازای سایر مقدارهای x (از فاصلهٔ تناوب) داریم: $-\sqrt{۲} < y < \sqrt{۲}$.

نمودارهای $y = \sin x$ و $y = \sin x + \cos x$، در شکل ۱۰۰ داده شده است.

۱۸۶. رسم نمودار دشوار نیست. باید نمودار $y = \ln x$ را برای $x > ۰$ و نمودار $y = \sin x$ را برای $x \leq ۰$ رسم کرد (شکل ۱۰۱).

۱۸۷. در آغاز به این نکته توجه کنیم که، وقتی با مقداری مثل $\sin\left(\sin\frac{\pi}{۶}\right)$، یعنی $\sin\left(\frac{۱}{۲}\right)$ سروکار داریم، منظور سینوس $\frac{۱}{۲}$ رادیان



شکل ۱۰۲

است. $\frac{۱}{۲}$ رادیان، یعنی کمانی بین ۲۸٫۵ درجه و ۲۹ درجه (یک رادیان، اندکی از ۵۷ درجه بیشتر است) و بنابراین $\sin \frac{۱}{۲}$ مقداری نزدیک به $\sin ۳۰^\circ$ است.

وقتی x از ۰ تا $\frac{\pi}{۲}$ تغییر کند، $\sin x$ از ۰ تا ۱ و، بنابراین $\sin(\sin x)$، از ۰ تا $\sin ۱$ (سینوس یک رادیان) تغییر می‌کند. یک رادیان کمی از $\frac{\pi}{۳}$ (۶۰ درجه) کمتر است، یعنی می‌توان $\sin ۱ \approx \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ گرفت.

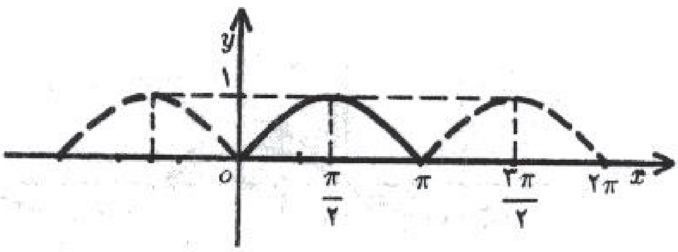
وقتی x از $\frac{\pi}{۲}$ تا $\frac{۳\pi}{۲}$ تغییر کند، $\sin(\sin x)$ از $\sin ۱$ تا $\sin(-۱)$ (یعنی به تقریب از $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ تا $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$) نزول می‌کند و، سرانجام، وقتی x از $\frac{۳\pi}{۲}$ تا ۲π تغییر کند، $\sin(\sin x)$، از $\sin(-۱)$ (به تقریب $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$) تا صفر صعود می‌کند.

نمودارهای $y = \sin x$ و $y = \sin(\sin x)$ در شکل ۱۰۲ روی یک دستگاه محورهای مختصات داده شده است.

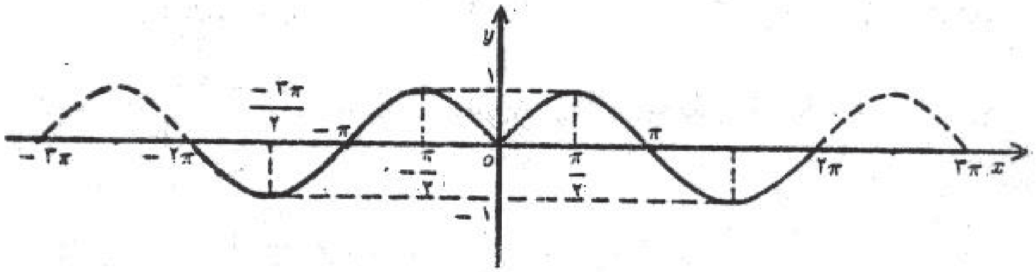
۱۸۸. دورهٔ تناوب $y = |\sin x|$ برابر است با π، زیرا

$$|\sin(x + \pi)| = |-\sin x| = |\sin x| = y$$

برای $۰ \le x \le \pi$ داریم $\sin x \ge ۰$ و بنابراین می‌توان نمودار $y = \sin x$ را، در این فاصله رسم کرد.



شکل ۱۰۳



شکل ۱۰۴

نمودار $y = |\sin x|$ در شکل ۱۰۳ داده شده است.

۲) $y = \sin|x|$ تابعی است زوج، زیرا

$$\sin|-x| = \sin|x| = y$$

و بنابراین، نموار آن، نسبت به محور $y'y$ متقارن است.

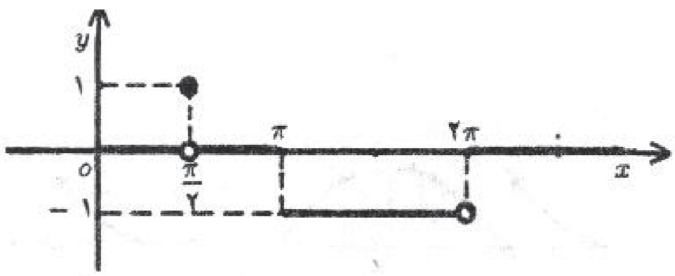
نمودار $y = \sin|x|$ در شکل ۱۰۴ داده شده است.

۳) برای $۰ \leq x < \frac{\pi}{۲}$، داریم $۰ \leq \sin x < ۱$ و بنابراین

$$۰ \leq x < \frac{\pi}{۲} \Rightarrow y = [\sin x] = ۰$$

به همین ترتیب

$$x = \frac{\pi}{۲} \Rightarrow y = [\sin x] = ۱,$$



شکل ۱۰۵ : نمودار $y = [\sin x]$ در فاصله $۰ \leq x \leq ۲\pi$

$$\frac{\pi}{۲} < x \leq \pi \Rightarrow y = ۰$$
$$\pi < x < ۲\pi \Rightarrow y = -۱$$
$$x = ۲\pi \Rightarrow y = ۰$$

در شکل ۱۰۵ دایره‌های کوچک توخالی جزو نمودار نیست و دایره‌های کوچک توپر جزو نمودار است.

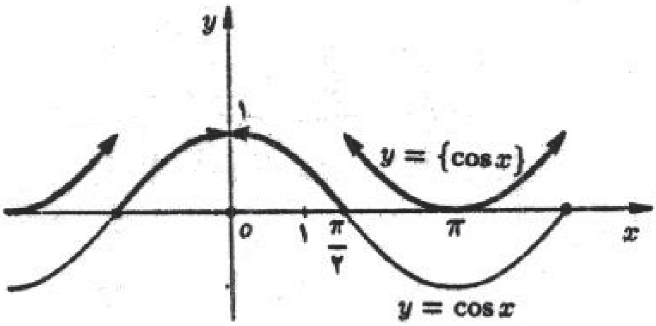
۴) توابع $y = \sin[x]$ متناوب نیست و، برای هر فاصله‌ای که نمودار آن را لازم داشته باشیم، باید به طور جداگانه محاسبه شود، مثلاً

$$-۱ \leq x < ۰ \Rightarrow y = \sin(-۱) \approx -\frac{\sqrt{۳}}{۲},$$
$$۰ \leq x < ۱ \Rightarrow y = \sin ۰ = ۰$$
$$۱ \leq x < ۲ \Rightarrow y = \sin ۱ \approx \frac{\sqrt{۳}}{۲} \left(< \frac{\sqrt{۳}}{۲} \right)$$
$$۲ \leq x < ۳ \Rightarrow y = \sin ۲ \approx \frac{\sqrt{۳}}{۲} \left(> \frac{\sqrt{۳}}{۲} \right)$$

خودتان نمودار را برای $-۲ \leq x < ۲$ رسم کنید.

۵) در شکل ۱۰۶، نمودار $y = \{\cos x\}$ (ضمن مقایسه با نمودار $y = \cos x$) داده شده است.

مثلاً، وقتی $۰ > x \geq -\frac{\pi}{۲}$ یا $۰ < x \leq \frac{\pi}{۲}$ نمودار $y = \{\cos x\}$



شکل ۱۰۶

بر نمودار $y = \cos x$ منطبق است، ولی به‌ازای $x = ۰$ داریم $\cos x = ۱$، در حالی که $\{\cos x\} = ۰$. دربارهٔ بقیهٔ فاصله‌ها خودتان دقت کنید و با نمودار شکل ۱۰۶ مقایسه کنید.